目 次

講義で用いる記号等について

- **ギリシャ文字**

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
	α	アルファ		ν	ヌゥー
	β	ベータ	Ξ	ξ	クシー
Γ	γ	ガンマ		o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
	ε	イプシロン		ρ	ロー
	ζ	ゼータ	Σ	σ	シグマ
	η	イータ		τ	タウ
Θ	θ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
	ι	イオタ	Φ	ϕ	ファイ
	κ	カッパ		χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ
	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

- **その他**
  - Def=定義, Prop=命題, Th = 定理, Lem=補題,

    Remark=注釈, Ex=例, 例題 , Proof= 証明, $\blacksquare$ = 証終
  - **R**= 実数全体, **C**= 複素数全体

    $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \ | \ x, y \in \mathbf{R}\}$

    $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ | \ x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$: n 次元ユークリッド空間
  - $\forall$ = For all 〜 = 任意の〜に関して

    $\exists$ = There exists 〜 = ある 〜 が存在して

    $s.t.$ = such that = 〜であるような

    $i.e.$ = id est = すなわち, つまり

    “ ${}^\forall A, {}^\exists B, s.t. C$ ” = 「任意の A に対して, C を満たすようなある B が存在する.」

第1章　集合と論理

1　命題論理

数学において用いられる論理的な推論を数学的記号法を用いて研究する分野を記号論理または数理論理学という．これは, Frege(フレーゲ) や B.Russell(ラッセル) 等によって発展し学問として確立した．ここでは, 論理記号の用い方, 推論の機構に関するごく基礎的な知識について学ぶ．今後必要となるであろう, 医療実験によってえられたデータから, 推定・仮説検定を行い, 結論へと導く論理的思考の基礎となる．

1.1　命題

命題　ある性質や状況などを述べている陳述 (または言明) があって, これが真 (True) であるか, 偽 (False) であるかどちらか一方に決定される (二値論理と呼ばれる) とき, この陳述を**命題**という．ある命題 P が真のとき T(true) の値をもつ, 偽のとき F(false) の値をもつと考えることができる．このとき, T や F を命題 P の**真理値**という．

例題 1.1
(1)　「人は動物である」「π は無理数である」$\Longrightarrow$ T 値の命題

(2)　「$n \in \mathbf{N}(\geq 3) \Rightarrow x^n + y^n = z^n$ となる整数の組 (x, y, z) は存在しない.」$\Longrightarrow$ T 値の命題

(3)　「動物は人間である.」「$\sqrt{3}$ は有理数である」$\Longrightarrow$ F 値の命題

(4)　「美人は薄命である」「ウサギは寂しいと死んでしまう.」$\Longrightarrow$ 真偽不明確なので命題ではない.

(5)　「地球外生命体は存在する」「肥満は遺伝である」$\Longrightarrow$???. *(未だ仮説か？)*

論理記号　与えられたいくつかの命題から, 新たな命題を構成するために用いられる記号を**論理記号**または**演算記号**という．$\vee, \wedge, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow$ などがある．P, Q を命題とし, 以下これらについて説明する．

(1)　$\vee$：**離接 (論理和)**　　$P \vee Q =$「P または Q (P or Q)」

(2)　$\wedge$：**結合 (論理積)**　　$P \wedge Q =$「P かつ Q (P and Q)」

(3)　$\sim$：**否定**　　$\sim P =$「P でない (not P)」

(4)　$\rightarrow$：**条件命題**　　$P \rightarrow Q =$「P ならば Q (if P, then Q)」

(5)　$\leftrightarrow$：**双条件命題**　　$P \leftrightarrow Q =$「P のとき, かつそのときに限り Q (P if and only if Q)」

例題 1.2　$P =$「2 の正の倍数」,　　$Q =$「3 の正の倍数」 のとき

$$
\begin{aligned}
P \vee Q &= \text{「2 または 3 の正の倍数」} \\
P \wedge Q &= \text{「6 の正の倍数」} \\
\sim P &= \text{「2 の正の倍数でない」} \\
P \rightarrow Q &= \text{「2 の正の倍数ならば 3 の正の倍数である」} \\
P \leftrightarrow Q &= \text{「2 の正の倍数ならば, かつそのときに限り 3 の正の倍数である」}
\end{aligned}
$$

例題 1.3　4 つの命題　　$P =$「彼は眠い」,　$Q =$「彼女は眠い」

$R =$「2 人で講義をサボる」,　$S =$「2 人で講義室で雑談する」

を用いて, 命題「彼か彼女が眠いならば, 2 人は講義をサボるか, 講義室で雑談する」を表現すると

$$(P \vee Q) \to (R \vee S) \qquad \text{となる.}$$

演算法則　離接, 結合, 否定については次の法則が成立する．ただし, 等号は左辺の命題の真偽 (T or F) と右辺の命題の真偽 (T or F) が一致することを意味する．このとき, **同値**であるという.

(1)　**異同法則**　$P \vee P = P, \quad P \wedge P = P$

(2)　**交換法則**　$P \vee Q = Q \vee P, \quad P \wedge Q = Q \wedge P$

(3)　**結合法則**　$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R), \quad (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

(4)　**二重否定の法則**　$\sim (\sim P) = P$

(5)　**分配法則**　$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$

(6)　**de Morgan の法則**　$\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q), \quad \sim (P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$

(7)　**排中法則**　$P \vee (\sim P) = \mathrm{T}$

(8)　**矛盾法則**　$P \wedge (\sim P) = \mathrm{F}$

(7) のように常に真なる値をとる命題を**恒真命題 (トートロジー tautology)** といい, 逆に, (8) のように常に偽なる値をとる命題を**恒偽命題**という．(1) ∼ (4) は自明である．その他については下記の真理表を作成することによりわかる.

真理表　下表のような, 命題 P, Q の真偽と, 論理記号を用いて新たに構成した命題の真偽との対応表を真理表という.

演算の真偽対応

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\sim P$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

排中・矛盾法則

P	$\sim P$	$P \vee (\sim P)$	$P \wedge (\sim P)$
T	F	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	T	T	F

分配法則第 1 式

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T　T	T　T　T
		F	T　T	T　T　F
	F	T	T　T	F　T　T
		F	F　F	F　F　F
F	T	T	F　T	F　F　F
		F	F　T	F　F　F
	F	T	F　T	F　F　F
		F	F　F	F　F　F
計算順序			2　1	3　5　4

分配法則第 2 式

P	Q	R	$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T	T	T	T　T	T　T　T
		F	T　F	T　T　T
	F	T	T　F	T　T　T
		F	T　F	T　T　T
F	T	T	T　T	T　T　T
		F	F　F	T　F　F
	F	T	F　F	F　F　T
		F	F　F	F　F　F
計算順序			2　1	3　5　4

de Morgan の法則第 1 式

P	Q	$\sim(P \vee Q)$	$(\sim P) \wedge (\sim Q)$
T	T	F T	F F F
T	F	F T	F F T
F	T	F T	T F F
F	F	T F	T T T
計算順序		2 1	3 5 4

de Morgan の法則第 2 式

P	Q	$\sim(P \wedge Q)$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
T	T	F T	F F F
T	F	T F	F T T
F	T	T F	T T F
F	F	T F	T T T
計算順序		2 1	3 5 4

条件命題と双条件命題の真偽　「P ならば Q」の否定は「P であるにもかかわらず Q でない」, すなわち「P であり, かつ Q でない」としなければならないだろう．これを論理式で書くと

$$\sim(P \to Q) = P \wedge (\sim Q)$$

となる．両辺の否定を考えると, 二重否定の法則と de Morgan の法則より

$$左辺 = \sim(\sim(P \to Q)) = (P \to Q)$$

$$右辺 = \sim(P \wedge (\sim Q)) = (\sim P) \vee (\sim(\sim Q)) = (\sim P) \vee Q$$

であるから,

$$(P \to Q) = (\sim P) \vee Q$$

となる．また, 双条件命題については

$$(P \leftrightarrow Q) = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

であるから真理表は下表の用になる．

P	Q	**条件命題** $(P \to Q)$ $= (\sim P) \vee Q$	$(Q \to P)$ $= (\sim Q) \vee P$	**双条件命題** $(P \leftrightarrow Q)$ $= (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	T	F T	F T	T
T	F	F F	T T	F
F	T	T T	F F	F
F	F	T T	T T	T
計算順序		1 2	1 2	3

日常語では, $P \to Q$ は P が真の場合しか問題にされていないのに, P が偽のとき $P \to Q$ を真と定めたということは, 論理を整合的に体系化するためである．つまり, de Morgan の法則に矛盾しないように便宜上, 定義したということである．P が偽のとき $P \to Q$ を真と定める定義の仕方を, 「嘘から出たまこと」と評した人がいるらしい．

逆・裏・対偶　条件命題 $P \to Q$ の逆・裏・対偶をそれぞれ次の式で定義する．

逆 (命題)　:　$Q \to P$
裏 (命題)　:　$\sim P \to \sim Q$
対偶 (命題)　:　$\sim Q \to \sim P$

真理表からも明らかなように,
もとの命題と対偶命題は同値である．

$(P \to Q) \quad = \quad ((\sim Q) \to (\sim P))$　(**対偶の法則**)

対偶の法則

P	Q	$P \to Q$	$(\sim Q) \to (\sim P)$
T	T	T	F T F
T	F	F	T F F
F	T	T	F T T
F	F	T	T T T
計算順序		1	2 4 3

例題 1.4　下の例を用いて今まで出てきた真理表の真偽を確認してみよう．

P	=「風が吹く」	$\sim P$	=「風が吹かない」
Q	=「桶屋が儲かる」	$\sim Q$	=「桶屋が儲からない」
$P \vee Q$	=「風が吹くか, または桶屋が儲かる」	$\sim(P \vee Q)$	=「風も吹かず, かつ桶屋も儲からない」
$P \wedge Q$	=「風が吹き, かつ桶屋が儲かる」	$\sim(P \wedge Q)$	=「風が吹かないか, または桶屋が儲からない」
$(P \to Q)$	=「風が吹けば桶屋が儲かる」	$\sim(P \to Q)$	=「風は吹くが, 桶屋は儲からない」

演習問題 1

(1)　命題「2 つの実数 a, b の和 $a+b$ が有理数ならば, a, b はともに有理数である.」の逆, 裏, 対偶を作り, その真理値を述べよ.

(2)　$P \to (Q \vee R) = (P \to Q) \vee (P \to R)$ が成立することを真理表を用いて示せ.

1.2　推論

命題変数と真理関数　各々の論理記号 ($\vee, \wedge, \sim, \to, \leftrightarrow$ *etc.*) は与えられた命題 (P や Q) に対して, 新たな命題 ($P \vee Q$ など) を構成させる関数 $f(P, Q)$ と考えられる. 関数と考えたとき, もともとの命題 P や Q を**命題変数**, 新たに構成された命題 (論理式) を**真理関数**という.

推論　$P, Q, \cdots, R$ を命題変数とし, その真理関数 $A = f(P, Q, \cdots, R)$ と $B = g(P, Q, \cdots, R)$ について考える. A が真 (T) となるようなすべての $P, Q, \cdots, R$ の真理値 (T or F) に対して常に B が真 (T) となるとき,

$$A \Rightarrow B$$

と書き, A から B は**推論**される, または**演繹**されるという. このとき, A を**前提** (または**仮定**), B を**結論**という. さらにこのとき, B は A であるための**必要条件**, A は B であるための**十分条件**という.

推論方式　一般に, 命題 $P_1, P_2, \cdots, P_n, Q$ に関する推論

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Longrightarrow Q \qquad を \qquad \frac{P_1, P_2, \cdots, P_n}{Q} \qquad で表す.$$

この表記を用いて, 次の古典論理学で取り上げられた主な推論方式の一部を考えよう.

(1)　簡約法則　: $\dfrac{P, Q}{P}$

(2)　付加法則　: $\dfrac{P}{P \vee Q}$

(3)　三段論法肯定式　: $\dfrac{P, P \to Q}{Q}$

(4)　三段論法否定式　: $\dfrac{P \to Q, \sim Q}{\sim P}$

(5)　選言的三段論法　: $\dfrac{P \vee Q, \sim P}{Q}$

(6)　仮言三段論法　: $\dfrac{P \to Q, Q \to R}{P \to R}$

(7)　構成的ディレンマ　: $\dfrac{P \to Q, R \to S, P \vee R}{Q \vee S}$

(8)　破壊的ディレンマ　: $\dfrac{P \to Q, R \to S, (\sim Q) \vee (\sim S)}{(\sim P) \vee (\sim R)}$

(1),(2) は自明. (3) $\sim$ (8) は下記の真理表により, 前提が真 (T) のとき, 結論も真 (T) であることを確認できる. しかし, 真理表を作成するよりも, 直接的に考えたほうが早いようである.

三段論法肯定式・否定式, 選言的三段論法

P	Q	$P \vee Q$	$P \to Q$	$\sim P$	$\sim Q$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

仮言三段論法

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
T	T	T	T	T	T
		F	T	F	F
	F	T	F	T	T
		F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
		F	T	F	T
	F	T	T	T	T
		F	T	T	T

構成的ディレンマ・破壊的ディレンマ

P	Q	R	S	$P \to Q$	$R \to S$	$P \vee R$	$Q \vee S$	$(\sim P) \vee (\sim R)$	$(\sim Q) \vee (\sim S)$
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	T	F	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T	F
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F	F	T	T

演習問題 2　3 つの命題 $P =$「私はカナダへ行く」, $Q =$「私はアメリカへ行く」, $R =$「私はニューヨークへ行く」について以下の問いに答えよ.

(1)　推論「私はカナダかアメリカへ行く.
私はアメリカに行けばニューヨークへ行く.
ゆえに私はカナダへ行くか, またはニューヨークへ行く.」P, Q, R を用いて表せ.

(2)　真理表を作ることにより, この推論が成り立つか否かを示せ.

2　述語論理

「3 は 7 より小さい, 7 は 10 より小さい, ゆえに, 3 は 10 より小さい.」これは, 前節の命題論理の考え方では説明できない．このような命題を説明するために考え出されたのが, 次の命題関数であり, これを研究する分野を述語論理という.

2.1　命題関数

次のような陳述：　$P(x) =$「x は偶数である」

は, $x = 2$ ならば真であり, $x = 3$ であれば偽である．$P(x)$ それ自体は真偽が決定しないから前節までの意味において命題ではない．しかしながら, x に特別な値を代入すると命題となる．このような陳述 $P(\cdot)$ は x を変数とする関数と考えることができるので, **命題関数**という．一般に

命題関数 ： $P(x) =$「x は条件 P を満たす」

限定命題　命題関数 $P(x)$ から次のような 2 つの命題を作ることができる.

限定命題 $\begin{cases} \textbf{全称命題}: & \forall x : P(x) = \text{「すべての変数 } x \text{ について条件 } P(x) \text{ が成り立つ」} \\ \textbf{存在命題}: & \exists x : P(x) = \text{「ある変数 } x \text{ について条件 } P(x) \text{ が成り立つ」} \end{cases}$

ここで, $\forall$ は**全称記号**, $\exists$ を**存在記号**といい, それぞれ all と exist の頭文字を上下逆にしたものであるといわれている．2 つ合わせて**限定記号**という.

例題 2.1 (1)　命題関数 $P(n) =$「$n^3 - n$ は 3 で割り切れる」に関する全称命題

$$\forall n \in \mathbf{N} : P(n) \quad = \text{「すべての自然数 } n \text{ について } n^3 - n \text{ は 3 で割り切れる」}$$

を考えよう．これは, $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ と因数分解されるから真となる.

(2)　命題関数 $P(x) =$「$1 < x < 2$ である」に関する存在命題

$$\exists x \in \mathbf{R} : P(x) \quad = \text{「ある実数 } x \text{ に関して } 1 < x < 2 \text{ である」}$$

はもちろん真である.

上述例題のように通常は変数 x の定義域を特定して議論する.

限定命題の別表現　上述例題はそれぞれ次のように書き直される.

(1)　命題関数 $P(x) =$「$x^3 - x$ は 3 で割り切れる」, $M(x) =$「x は自然数である」とすると

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N} : P(n) &= \text{「すべての自然数 } n \text{ について } n^3 - n \text{ は 3 で割り切れる」} \\ &= \forall x : [M(x) \to P(x)] \end{aligned}$$

(2)　命題関数 $P(x) =$「$1 < x < 2$ である」, $M(x) =$「x は実数である」に関する存在命題

$$\begin{aligned} \exists x : P(x) &= \text{「ある実数 } x \text{ に関して } 1 < x < 2 \text{ である」} \\ &= \exists x : [M(x) \wedge P(x)] \end{aligned}$$

例題 2.2　命題関数 $D(f) =$「f は微分可能な $\mathbf{R}$ 上の関数である」,
$C(f) =$「f は連続な $\mathbf{R}$ 上の関数である」とすると,

全称命題　$\forall f : [D(f) \to C(f)] =$「微分可能な $\mathbf{R}$ 上の関数は, すべて連続である」　は真である.

限定命題の否定　限定命題の否定はそれぞれ次のようになる.

「すべての x について $P(x)$ が成り立つ」　の否定　=　「ある x について $P(x)$ が成り立たない」
「ある x について $P(x)$ が成り立つ」　の否定　=　「すべての x について $P(x)$ が成り立たない」

したがって, 限定記号を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \sim(\forall x : P(x)) &= \exists x :\sim P(x) \\ \sim(\exists x : P(x)) &= \forall x :\sim P(x) \end{aligned}$$

となる. 次に, 限定命題の別表現の例題の否定を考える.

(1)　命題関数 $P(x) =$「$x^3 - x$ は 3 で割り切れる」, $M(x) =$「x は自然数である」とすると

$$\begin{aligned} \sim(\forall x : [M(x) \to P(x)]) &= \text{「すべての自然数 } x \text{ について } x^3 - x \text{ は 3 で割り切れる」の否定} \\ &= \text{「ある自然数 } x \text{ について } x^3 - x \text{ は 3 で割り切れない」} \\ &= \exists x : [M(x) \wedge (\sim P(x))] \end{aligned}$$

(2)　命題関数 $P(x) =$「$1 < x < 2$ である」, $M(x) =$「x は実数である」とすると

$$\begin{aligned} \sim(\exists x : [M(x) \wedge P(x)]) &= \text{「ある実数 } x \text{ に関して } 1 < x < 2 \text{ である」の否定} \\ &= \text{「すべての実数 } x \text{ に関して } x \leq 1 \text{ または } 2 \leq x \text{ である」} \\ &= \forall x : [M(x) \to (\sim P(x))]. \end{aligned}$$

上述例題の関係

$$\begin{aligned} \sim(\forall x : [M(x) \to P(x)]) &= \exists x : [M(x) \wedge (\sim P(x))] \\ \sim(\exists x : [M(x) \wedge P(x)]) &= \forall x : [M(x) \to (\sim P(x))] \end{aligned}$$

は, すべての命題関数についても成り立つ. したがって, 限定命題の否定を作るとき, 次の上下の記号をそれぞれ交換すればよいことに気付くだろう.

$$\begin{array}{ccc} \forall x, & \to, & P(x) \\ \exists x, & \wedge, & \sim P(x) \end{array}$$

次々回の話題である数列の収束と関数の連続性についての論理記述を述べて, 命題についての議論を終える.

例題 2.3　(1)　**(数列の収束)** 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある $a \in \mathbf{R}$ に収束するとは,
「任意の正数 ε について, ある番号 N が存在し,
すべての番号 $n \geq N$ に対して, $|a_n - a| < \varepsilon$ が成立」

$$\begin{aligned} &= \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}\ [n \geq N \ \to\ |a_n - a| < \varepsilon] \\ &= \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}\ \ s.t.\ \ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

(2)　**(関数の連続性)** 実数上の関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であるとは,
「任意の正数 ε について, ある正数 δ が存在し,
$0 < |x - a| < \delta$ となるすべての実数 x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成立」

$$\begin{aligned} &= \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}\ [0 < |x - a| < \delta \ \to\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon] \\ &= \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ s.t.\ \ 0 < |x - a| < \delta \ \to\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

演習問題 3　(1)　命題「方程式 $x^3 - 2 = 0$ は実根をもつ」を限定記号を用いて表せ.

(2)　上述例題の「数列の収束」の否定を論理記号によって作り, 文章化しなさい.

(3)　上述例題の「関数の連続性」の否定を論理記号によって作り, 文章化しなさい.

3　集合

集合論は 19 世紀後半に Cantor(カントール) によって創始され, 解析学をはじめとする多くの領域に大きな成果を もたらした. いまや集合論は, 数学全分野に共通する基礎的な概念となっている.

3.1　集合の定義と演算

ある性質・条件を満たす個々のものの集まりで, 2 つの条件：

(i) 考える範囲が明確なこと.　　(ii) 個々の要素の異同が区別できること.

を満たしているものの全体を **集合** といい, 個々のものをその集合の **元** または **要素** と呼ぶ.

a が集合 A の元であることを,　$a \in A$　または　$A \ni a$　と書き,

a は A に**属する**または**含まれる**, A は a を**含む**という. また, a が A に属さないことを $a \notin A$ で表す.

集合の表記法

(1)　**(列記法)** 集合 A の元を 1 つずつ並べ立てる方法

$$A = \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\} \qquad \Big(ex.\ \ A = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}\Big)$$

(2)　**(条件表記法)** 集合 A に属する元 a の満たすべき条件 $P(a)$ を表記する方法

$$A = \{a \mid P(a)\} \qquad \text{あるいは} \qquad A = \{a\ :\ P(a)\}$$

$$\Big(ex.\ \ A = \{a\ :\ a = 3^m, m = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{3^m \mid m = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}\Big)$$

空集合と数の集合の記号　以後, 数の集合を取扱う場合が多く, 特に次のような記号の用い方をする.

$\emptyset = \{$ 元が 1 つもない集合 $\} =$ **空集合**
$\mathbf{N} = \{n :$ 自然数 ($natural\ number$) の全体 $\}$
$\mathbf{Z} = \{m :$ 整数 ($Zahl$ ドイツ語) の全体 $\}$
$\mathbf{Q} = \{q :$ 有理数 ($rational\ number$) の全体 $\}$
$\mathbf{R} = \{x :$ 実数 ($real\ number$) の全体 $\}$
$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$
$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$
$\mathbf{C} = \{z :$ 複素数 ($complex\ number$) の全体 $\}$

包含関係　2 つの集合 A, B において,

- A のすべての元が B の元となっているとき,　i.e. 「 $x \in A \Longrightarrow x \in B$ 」,
  A は B の**部分集合**であるといい, $A \subset B$ で表す.
- $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立するとき, A と B は**等しい**といい, $A = B$ と書く.
- $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき, A は B の**真部分集合**であるという.

集合の包含関係 ($\subset$) については, 次のことが成り立つ.

$$A \subset A \qquad \text{(反射法則)}$$
$$A \subset B,\quad B \subset C \quad \Longrightarrow \quad A \subset C \qquad \text{(推移法則)}$$

集合の演算 1つの集合 X を固定して, その部分集合 A, B, C などについて論じる場合, X を**全体集合**または**全集合**という. 以下, 全体集合 X を固定し, その部分集合の演算を考える.

(1) **和集合** A または B の少なくとも一方に属する元の全体を $A \cup B$ で表し,
A と B の和集合と呼ぶ.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ or } \ x \in B\}$$

(2) **積集合** A と B の両方に属する元の全体を $A \cap B$ で表し,
A と B の積集合と呼ぶ.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ and } \ x \in B\}$$

(3) **差集合** A の元で B に属さない元の全体を $A \setminus B$ で表し,
A の差集合と呼ぶ.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ and } \ x \notin B\}$$

(4) **補集合** 全体集合 X の元で A に属さない元の全体を $\overline{A}$ で表し,
A の補集合と呼ぶ.

$$\overline{A} = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

演算法則 集合の和, 積, 差について, 次の法則が成立する.

(1) **交換法則** $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(2) **結合法則** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) **分配法則** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) **de Morgan の法則** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) **差と補集合の関係** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Proof

(4) $x \in \overline{A \cup B} \ \Leftrightarrow \ x \notin A \cup B \ \Leftrightarrow \ x \notin A \ \text{ and } \ x \notin B \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A} \ \text{ and } \ x \in \overline{B} \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$
$x \in \overline{A \cap B} \ \Leftrightarrow \ x \notin A \cap B \ \Leftrightarrow \ x \notin A \ \text{ or } \ x \notin B \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A} \ \text{ or } \ x \in \overline{B} \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$

他も同様. ∎

集合と論理の関係 条件表記法 $\{x : P(x)\}$ における条件 $P(x)$ は命題関数とみることができる. したがって, 論理的演算における 離接, 結合, 否定 と集合の演算における 和, 差, 補集合 には以下の対応が成立する.

(1) $\{x : P(x) \vee Q(x)\} = \{x : P(x)\} \cup \{x : Q(x)\}$

(2) $\{x : P(x) \wedge Q(x)\} = \{x : P(x)\} \cap \{x : Q(x)\}$

(3) $\{x : \ \sim P(x)\} = \overline{\{x : P(x)\}}$

Proof 演習問題 ∎

演習問題 4 (1) 3で割ると1余るの自然数の集合を条件表記法で表せ.

(2) $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}, \ B = \{x \in \mathbf{R} : x > 2\}, \ C = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 5\}$ について,
$A \cup B \cup C, \ A \cap B \cap C, \ (A \cup B) \cap \overline{C}$ を求めよ.

(3) 次式を示せ. $A \subset C, \ \ B \subset C \Longrightarrow A \cup B \subset C$

(4) 分配法則を用いて次式を示せ. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$

(5) 集合 A, B, C の和集合 $A \cup B \cup C$ を互いに共通部分をもたない集合 A_1, A_2, A_3 の和集合として表せ.

3.2　集合族の演算

集合族　全体集合 X の n 個の部分集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ に対して $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$ は集合を元とする集合である．一般に集合を元とする集合を**集合族**という．集合の無限列 $\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ も集合族である．集合の無限列はまた, 次のような表し方ができる．

$$\{A_i \ : \ i = 1, 2, \cdots\} \qquad \text{または} \qquad \{A_i \ : \ i \in \mathbf{N}\}$$

一般に, 有限個または無限個の集合からなる任意の集合族を $\{A_\mu \ : \ \mu \in M\}$ と書く．ここで, μ を集合 A の**添え字**といい, M を**添え字集合**という．集合の無限列の場合は $M = \mathbf{N}$ である．

べき集合　集合 A の部分集合の全体からなる集合族を A の **べき集合**といい, 2^A で表す．

Ex. $A = \{a, b, c\}$ のとき,

$$2^A = \{B \ : \ B \subset A\} = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\Big\}.$$

集合族の演算　集合族 $\{A_\mu \ : \ \mu \in M\}$ についても前節と同様に演算を考えることができる．

(1)　**和集合**　少なくとも 1 つの集合 A_μ に属する元の全体を $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu$ で表し, $\{A_\mu : \mu \in M\}$ の和集合と呼ぶ．

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{x \ : \ \text{ある}\mu \in M \text{ について } x \in A_\mu\}$$

(2)　**積集合**　すべての集合 A_μ に属する元の全体を $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu$ で表し, $\{A_\mu : \mu \in M\}$ の積集合と呼ぶ．

$$\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x \ : \ \text{すべての}\mu \in M \text{ について } x \in A_\mu\}$$

Ex.　$M = \{\mu : \mu > 1\} = (1, \infty)$,　　$A_\mu = \{x : 0 < x < \mu\} = (0, \mu)$　　とすると

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \bigcup_{\mu > 1} A_\mu = (0, \infty), \qquad \bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \bigcap_{\mu > 1} A_\mu = (0, 1].$$

Proof

$$x \in \bigcup_{\mu \in M} A_\mu \iff \exists \mu > 1 \ : \ x \in A_\mu = (0, \mu) \iff x \in (0, \infty).$$

$$x \in \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \iff \forall \mu > 1 \ : \ x \in A_\mu = (0, \mu) \iff x \in (0, 1].$$

∎

集合族の演算法則　集合族 $\{A_\mu \ : \ \mu \in M\}$ についても, 次の法則が成立する．

(1)　**結合法則**　$\left(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu\right) \cup B = \bigcup_{\mu \in M} (A_\mu \cup B)$,　$\left(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu\right) \cap B = \bigcap_{\mu \in M} (A_\mu \cap B)$

(2)　**分配法則**　$\left(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu\right) \cap B = \bigcup_{\mu \in M} (A_\mu \cap B)$,　$\left(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu\right) \cup B = \bigcap_{\mu \in M} (A_\mu \cup B)$

(3)　**de Morgan の法則**　$\overline{\left(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu\right)} = \bigcap_{\mu \in M} \overline{A_\mu}$,　$\overline{\left(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu\right)} = \bigcup_{\mu \in M} \overline{A_\mu}$

Proof　(3)

$$x \in \overline{\left(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu\right)} \iff x \notin \bigcup_{\mu \in M} A_\mu \iff \forall \mu \in M \ : \ x \notin A_\mu \iff \forall \mu \in M \ : \ x \in \overline{A_\mu} \iff x \in \bigcap_{\mu \in M} \overline{A_\mu}.$$

$$x \in \overline{\left(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu\right)} \iff x \notin \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \iff \exists \mu \in M \ : \ x \notin A_\mu \iff \exists \mu \in M \ : \ x \in \overline{A_\mu} \iff x \in \bigcup_{\mu \in M} \overline{A_\mu}.$$

他も同様. ∎

3.3　集合の濃度

集合の濃度　集合 A の元の個数を**濃度**といい, $n(A)$ または $\#A$ で表す. 濃度が有限であれば**有限集合**そうでなければ**無限集合**と呼ぶ.

Ex.　$A=\{1,2,3,\cdots,m\}$ のとき, $n(A)=m<\infty$ だから, 集合 A は有限集合である.

無限集合　無限集合の場合, どんな集合もすべて濃度が無限ということで一律に片付けず, 無限の概念に段階を付ける. 無限集合の中で最も基本的なのは自然数全体の集合

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

である. この自然数全体の濃度を $n(\mathbf{N})=\aleph_{\mathbf{0}}$ (これはヘブライ文字の最初のもので, **アレフ・ゼロ**と読む) で表す. 濃度が自然数濃度 $\aleph_{\mathbf{0}}$ である無限集合を**可算集合**または**可付番集合**という. これは, 集合の元を 1 つずつ数えあげることができる, つまり集合の元に番号を付けることができるということを意味する.

Ex.　正の偶数全体の集合 $\mathbf{E}$, 整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ は可算集合である. 次のように番号を付けることができる.

$$\begin{cases}\mathbf{E}: 2 \quad 4 \quad 6 \quad \cdots \quad 2n \quad \cdots \\ \quad\ \ | \quad\ | \quad\ | \quad \cdots \quad\ | \quad\ \cdots \\ \mathbf{N}: 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n \quad \cdots\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{Z}: 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad \cdots \quad n \quad -n \quad \cdots \\ \quad\ \ | \quad\ | \quad\ \ | \quad\ | \quad\ \ | \quad \cdots \quad | \quad\ \ | \quad \cdots \\ \mathbf{N}: 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \cdots \quad 2n \quad 2n+1 \quad \cdots\end{cases}.$$

Ex.　有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ も可算集合である.

<u>*Proof*</u>　格子点 $(m,n)\in\mathbf{N}^2$ を分数 m/n とみなし, 次のように和 $m+n$ の値の小さい順に並べると

$$\begin{array}{llllll} (1,1)=1, & (1,2)=\frac{1}{2}, & (2,1)=2, & (1,3)=\frac{1}{3}, & (2,2)=1, & (3,1)=3, \\ (1,4)=\frac{1}{4}, & (2,3)=\frac{2}{3}, & (3,2)=\frac{3}{2}, & (4,1)=4, & (1,5)=\frac{1}{5}, & (2,4)=\frac{1}{2}, \quad \cdots \end{array}$$

となる. ここで, 重複して出てくるものを除いて番号を付ければ, すべての正の有理数にもれなく番号を付けることができたことになる. それを $\{0,a_1,a_2,\cdots\}$ とする. そうすると有理数の全体は $\{0,a_1,-a_1,a_2,-a_2,\cdots\}$ と表現できるから, $\mathbf{Q}$ は可算集合である. ∎

一方, 可算集合でない無限集合を**非可算集合**または**非可付番集合**という. 例えば実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の濃度は自然数濃度 $\aleph_{\mathbf{0}}$ よりも大きく, 非可算集合である. つまり, 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の元には番号を付けることができない. この実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の濃度を $n(\mathbf{R})=\aleph$ で表し, **アレフ**または**連続濃度**という.

Ex.　$I=(0,1)$ は非可算集合である.

<u>*Proof*</u>　$I=(0,1)$ が可算集合であると仮定する. したがって, $I=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ と番号付けができる. これらを無限小数展開し, 次のように表現する. (有限小数は $0.237=0.2369999999\cdots$ と表すことができる.)

$$I:\begin{cases} a_1 = 0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots, \\ a_2 = 0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots, \\ a_3 = 0.\,a_{31}a_{32}a_{33}\cdots, \\ a_4 = 0.\,a_{41}a_{42}a_{43}\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ここで, a_{ij}は I の i 番目の実数 a_iの小数第 j 位の数字で 0 から 9 までの間の整数値をとる. 次に,

$$b_i=\begin{cases} 1 & (a_{ii}\text{が偶数のとき}) \\ 2 & (a_{ii}\text{が奇数のとき}) \end{cases} \qquad i=1,2,3,\cdots, \qquad \text{として,} \qquad b=0.\,b_1b_2b_3b_4\cdots \qquad \text{を作る.}$$

そうすると,　$b_1\neq a_{11}$ より $b\neq a_1$,　$b_2\neq a_{22}$ より $b\neq a_2$,　$\cdots\cdots$,　$b_n\neq a_{nn}$ より $b\neq a_n$,　$\cdots\cdots$, となる. つまり $b\notin\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}=I$. 一方, 明らかに $b\in(0,1)=I$. 矛盾. したがって $I=(0,1)$ は非可算集合である. ∎

注釈 3.1　この定理は *Cantor* が無限集合に関する研究で得た大きな成果の 1 つであり, この証明法を**対角線論法**という.

注釈 3.2　$I = (0,1)$ 上の単調増加関数 $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ によって, I と実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の元は 1 対 1 に対応する. つまり I の濃度と $\mathbf{R}$ の濃度は等しい. したがって, $\mathbf{R}$ が非可算集合であることが分る.

注釈 3.3　無限集合に濃度 $\aleph_0$ と $\aleph$ の少なくとも 2 種類があることを述べたが, さらに大きな濃度をもつ集合 (族) がいくらでもあることが知られている. これは集合の部分集合全体からなる集合 (冪集合), その冪集合, またその冪集合と考えていくことによりいくらでも大きな濃度をもつ集合がつくられることから示される.

演習問題 5　$n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n = [n, \infty)$ のとき, $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ および $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ.

3.4　写像

写像　2 つ集合 X, Y について, X の各元にそれぞれ Y の 1 つの元が対応させられているとき, この対応を f で表し, X から Y への **写像**といい,

$$f : X \to Y$$

で表す. このとき, X の元 x に対応する Y の元を $f(x)$ で表し, x の f による**像**という. また, X を f の**定義域**, f による像の全体 $f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ を**値域**という. また, 部分集合 $A \subset X,\ B \subset Y$ に対して

$$\begin{array}{rcll} f(A) & = & \{f(x) : x \in A\} & : \ f \text{ による集合 } A \text{ の}\textbf{像} \\ f^{-1}(B) & = & \{x \in X : f(x) \in B\} & : \ f \text{ による集合 } B \text{ の}\textbf{逆像} \end{array}$$

という.

注釈 3.4　X 及び Y が実数全体の集合 $\mathbf{R}$ や複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ のとき, 写像 $f : X \to Y$ を**関数**と呼ぶ. 関数の概念を一般化したものが写像である.

集合の像に関する公式

(i)　$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$,
　　$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ii)　$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
　　$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(iii)　$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
　　$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(iv)　$A \subset f^{-1}(f(A))$,
　　$B \subset f(X) \Longrightarrow B = f(f^{-1}(B))$.

Proof

$$\begin{array}{lllll}
\text{(i)} & y \in f(A_1) & \Rightarrow & \exists x \in A_1 \subset A_2 \ s.t.\ y = f(x) & \Rightarrow \ y = f(x) \in f(A_2) \\
 & x \in f^{-1}(B_1) & \Rightarrow & f(x) \in B_1 \subset B_2 & \Rightarrow \ x \in f^{-1}(B_2) \\
\text{(ii)} & y \in f(A_1 \cup A_2) & \Leftrightarrow & \exists x \in A_1 \cup A_2 \ s.t.\ y = f(x) & \\
 & & \Leftrightarrow & y = f(x) \in f(A_1) \ or \ y = f(x) \in f(A_2) & \Leftrightarrow \ y = f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2) \\
 & x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) & \Leftrightarrow & f(x) \in B_1 \cup B_2 & \\
 & & \Leftrightarrow & f(x) \in B_1 \ or \ f(x) \in B_2 & \Leftrightarrow \ x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\
\text{(iii)} & y \in f(A_1 \cap A_2) & \Leftrightarrow & \exists x \in A_1 \cap A_2 \ s.t.\ y = f(x) & \\
 & & \Rightarrow & y = f(x) \in f(A_1) \ and \ y = f(x) \in f(A_2) & \Leftrightarrow \ y = f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2) \\
 & x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) & \Leftrightarrow & f(x) \in B_1 \cap B_2 & \\
 & & \Leftrightarrow & f(x) \in B_1 \ and \ f(x) \in B_2 & \Leftrightarrow \ x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\
\text{(iv)} & x \in A & \Rightarrow & f(x) \in f(A) & \Leftrightarrow \ x \in f^{-1}(f(A)) \\
 & y \in B \subset f(X) & \Leftrightarrow & \exists x \in X \ s.t.\ y = f(x) \in B & \\
 & & \Leftrightarrow & \exists x \in f^{-1}(B) \ s.t.\ y = f(x) & \Leftrightarrow \ y = f(x) \in f(f^{-1}(B)) \quad \blacksquare
\end{array}$$

写像の種類　写像 $f : X \to Y$ について

- $f(X) = Y$ となるとき f は X から Y への**上への写像**または**全射**であるという.
- $x_1 \neq x_2$ ならば常に $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つとき, f は **1 対 1 の写像**または**単射**であるという.
- f が X から Y への上への 1 対 1 写像であるとき, **全単射**であるという. このとき $y = f(x)$ によって, 逆に Y から X への全単射写像が定められる. これを $x = f^{-1}(y)$ で表し, $y = f(x)$ の**逆写像**と呼ぶ.

4　演習問題解答

演習問題 1

(1)　$P =$「$a+b \in \mathbf{Q}$」,　$Q_1 =$「$a \in \mathbf{Q}$」,　$Q_2 =$「$b \in \mathbf{Q}$」,　$Q = Q_1 \wedge Q_2$ とおくと

「2 つの実数 a, b の和 $a+b$ が有理数ならば, a, b はともに有理数である.」$= (P \to Q)$　であるから,

$$
\begin{array}{llcll}
\text{逆}: & Q \to P & = & (Q_1 \wedge Q_2) \to P & \\
 & & = & \text{「}a, b \in \mathbf{Q} \text{ ならば } a+b \in \mathbf{Q}\text{」} & T \text{ 値の命題} \\
\text{裏}: & (\sim P) \to (\sim Q) & = & (\sim P) \to \{(\sim Q_1) \vee (\sim Q_2)\} & \\
 & & = & \text{「}a+b \notin \mathbf{Q} \text{ ならば } a \notin \mathbf{Q} \text{ または } b \notin \mathbf{Q}\text{」} & T \text{ 値の命題} \\
\text{対偶}: & (\sim Q) \to (\sim P) & = & \{(\sim Q_1) \vee (\sim Q_2)\} \to (\sim P) & \\
 & & = & \text{「}a \notin \mathbf{Q} \text{ または } b \notin \mathbf{Q} \text{ ならば } a+b \notin \mathbf{Q}\text{」} & F \text{ 値の命題}
\end{array}
$$

(2)

P	Q	R	$P \to (Q \vee R)$		$(P \to Q) \vee (P \to R)$		
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T
計算順序			2	1	3	5	4

数式で示すと,

$$
\begin{aligned}
P &\to (Q \vee R) \\
&= (\sim P) \vee (Q \vee R) \\
&= ((\sim P) \vee Q) \vee ((\sim P) \vee R) \\
&= (P \to Q) \vee (P \to R)
\end{aligned}
$$

演習問題 2

(1)　$\dfrac{P \vee Q,\ Q \to R}{P \vee R}$

(2)

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\wedge$	$(Q \to R)$	$P \vee R$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F

演習問題 3 の解答

(1)　命題関数 $P(x) =$「$x^3 - 2 = 0$」, $M(x) =$「x は実数である」とすると

「方程式 $x^3 - 2 = 0$ は実根をもつ」　$=$　$\exists x : [M(x) \wedge P(x)]$　$=$　$\exists x \in \mathbf{R} : P(x)$

(2)　$\sim\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}\ : [n \geq N\ \to\ |a_n - a| < \varepsilon]\Big)$

$=$　$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N} : \big[(n \geq N) \wedge (|a_n - a| \geq \varepsilon)\big]$

$=$　「ある正数 ε があって, どんな番号 N に対しても, ある番号 $n \geq N$ があって, $|a_n - a| \geq \varepsilon$ が成立」

(3)　$\sim\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}\ : [0 < |x - a| < \delta\ \to\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon]\Big)$

$=$　$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbf{R} : \big[(0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)\big]$

$=$　「ある正数 ε があって, どんな正数 δ に対しても, ある実数 x があって,

$0 < |x - a| < \delta$　かつ　$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ が成立」

演習問題 4 の解答

(1) $\{x \ : \ x = 3n - 2, \ n \in \mathbf{N}\}$

(2) $A \cup B \cup C = \mathbf{R}$, $A \cap B \cap C = (2, 5]$, $(A \cup B) \cap \overline{C} = (5, \infty)$

(3) $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \subset C$ or $x \in B \subset C \Longrightarrow x \in C$

(4)
$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (C \cap D) &= \{(A \cap B) \cup C\} \cap \{(A \cap B) \cup D\} \\ &= \{(A \cup C) \cap (B \cup C)\} \cap \{(A \cup D) \cap (B \cup D)\} \\ &= (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)\end{aligned}$$

(5) $A_1 = A$,　　$A_2 = B \setminus A = B \cap \overline{A}$,　　$A_3 = C \setminus (A \cup B) = C \cap \overline{(A \cup B)} = C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$

演習問題 5 の解答　$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [1, \infty)$,　$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

第2章　1変数関数の微分積分学

1　数列と極限

高校で直観的に定義された「極限, 実数列の収束, 関数の連続」という概念を論理記号を用いて明確に考える.

最初に, 実数 $a \leq b$ に対して次の区間を定義しておく.

$$
\begin{array}{rcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbf{R} \ : \ a \leq x \leq b\} & : \ \text{閉区間} \\
(a,b) & = & \{x \in \mathbf{R} \ : \ a < x < b\} & : \ \text{開区間} \\
[a,b) & = & \{x \in \mathbf{R} \ : \ a \leq x < b\} & : \ \text{右開区間} \\
(a,b] & = & \{x \in \mathbf{R} \ : \ a < x \leq b\} & : \ \text{左開区間}
\end{array}
$$

数列の極限　実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を順に一列に並べたものを**数列**と呼び, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} (= \{a_n\}_n)$ と表す. 数列 $\{a_n\}_n$ の極限について高校の教科書では次のように定義している.

高校での定義: 「数列 $\{a_n\}_n$ の**極限**が $a \in \mathbf{R}$ である, または数列 $\{a_n\}_n$ が $a \in \mathbf{R}$ に**収束**する」とは

「n を限りなく大きくする　とき,　a_nが a に限りなく近づく」　を意味し,
$n \to \infty$　のとき,　$a_n \to a$　と表記する.

この「限りなく大きくする」とか「限りなく近づく」という表現は, 曖昧さをもっている. そこで前章の論理的記述を用いてこれらの表現をより明確にしよう.

「a_nが a に限りなく近づく」=「どんな正数 ε に対しても $|a_n - a| < \varepsilon$ とできる」

と書くことができる. これがいつ起きるかというと

「n を限りなく大きくするとき」=「ある十分大きな自然数 N に対して $n \geq N$ のとき」

と表記できる. つまり,
「任意の正数 ε に対して, ある番号 N があって, $n \geq N$ となるすべての n に対して $|a_n - a| < \varepsilon$ が成立する」
したがって実数列の極限を論理記述で厳密に表すと,

定義 1.1 (ε-N 論法)　「数列 $\{a_n\}_n$ の**極限**が $a \in \mathbf{R}$ である, または数列 $\{a_n\}_n$ が $a \in \mathbf{R}$ に**収束**する」とは

「　$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N} \ \ s.t. \ \ n \geq N \to |a_n - a| < \varepsilon$　」

を意味し,　$n \to \infty$ のとき $a_n \to a$　または　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$　と書く.

例題 1.2　数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ について考えよう。$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ともに 0 に収束することは自明であるが, ε-N 論法形式で確認してみる。

(1)　$\varepsilon = 0.1$ のとき,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < 0.1 \iff n > 10 \quad \text{だから} \quad N \geq 11 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$
$$|b_n - 0| = \frac{1}{n^2} < 0.1 \iff n > \sqrt{10} \fallingdotseq 3.16 \quad \text{だから} \quad N \geq 4 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$

(2)　$\varepsilon = 0.01$ のとき,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < 0.01 \iff n > 100 \quad \text{だから} \quad N \geq 101 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$
$$|b_n - 0| = \frac{1}{n^2} < 0.01 \iff n > 10 \quad \text{だから} \quad N \geq 11 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$

(3)　$\varepsilon = 0.001$ のとき,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < 0.001 \iff n > 1000 \quad \text{だから} \quad N \geq 1001 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$
$$|b_n - 0| = \frac{1}{n^2} < 0.001 \iff n > 10\sqrt{10} \fallingdotseq 31.62 \quad \text{だから} \quad N \geq 32 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$

(4)　$\varepsilon = 0.0001$ のとき,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < 0.0001 \iff n > 10000 \quad \text{だから} \quad N \geq 10001 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$
$$|b_n - 0| = \frac{1}{n^2} < 0.0001 \iff n > 100 \quad \text{だから} \quad N \geq 101 \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$

(5)　任意の ε に対して,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{だから} \quad N \geq [\frac{1}{\varepsilon} + 1] \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$
$$|b_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{だから} \quad N \geq [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1] \quad \text{なる番号を選べばよい。}$$

ただし, ガウス記号 $[x]$ は x 以下の最大整数を表す.

これから, ある番号 N は, 任意の正数 ε に依存して決定されることがわかる．また, a_nが 0.0001 より小さくなるためには, $n > 10000$ でなくてはならないが, b_nが 0.0001 より小さくなるためには, $n > 100$ で十分であることかがわかる．つまり, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はともに 0 に収束するが, その収束の速さは $\{a_n\}$ よりも $\{b_n\}$ のほうが断然速いということである.

収束の速さまで考えて議論するには ε-N 論法を使うと数量的によくわかる.

高校で学んだ発散の概念も論理記述を用いると次のように書ける.

定義 1.3　一般に数列 $\{a_n\}_n$ が収束しないとき**発散する**という．特に

(1)　数列 $\{a_n\}_n$ が**無限大** (∞) **に発散する**とは :　$\forall K \in \mathbf{R}, \ \exists N \in N \ \ s.t. \ \ n \geq N \to a_n \geq K$

(2)　数列 $\{a_n\}_n$ が**負の無限大** ($-\infty$) **に発散する**とは :　$\forall K \in \mathbf{R}, \ \exists N \in N \ \ s.t. \ \ n \geq N \to a_n \leq K$

次の 3 つ定理は, 高等学校学んだことであるが, 証明を与えておこう.

定理 1.4　$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば,

(1)　$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$　(α, βは定数)

(2)　$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$　(ただし, $b \neq 0$)

Note

$$\max_{1\le k\le n} x_k = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} := 「x_1, x_2, \cdots, x_k の中の最大値」$$

$$\min_{1\le k\le n} x_k = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} := 「x_1, x_2, \cdots, x_k の中の最小値」$$

Proof　前提条件から次の 2 つのことが成立している:

(i)　$\forall\varepsilon_1 > 0,\ \exists N_1\ s.t.\ n \ge N_1 \to |a_n - a| < \varepsilon_1$

(ii)　$\forall\varepsilon_2 > 0,\ \exists N_2\ s.t.\ n \ge N_2 \to |b_n - b| < \varepsilon_2$

(1) $\forall\varepsilon > 0$ に対して, $|\alpha|\varepsilon_1 + |\beta|\varepsilon_2 \le \varepsilon$ となるように $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ を選び, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく．このとき, $n \ge N$ に対して,

$$\begin{aligned}
|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| &= |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \\
&\le |\alpha(a_n - a)| + |\beta(b_n - b)| \qquad (\because\ 三角不等式) \\
&\le |\alpha||(a_n - a)| + |\beta||(b_n - b)| \ \le\ |\alpha|\varepsilon_1 + |\beta|\varepsilon_2 \ \le\ \varepsilon
\end{aligned}$$

(2) $\forall\varepsilon > 0$ に対して, $\varepsilon_1\varepsilon_2 + |a|\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 \le \varepsilon$ となるように $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ を選び, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく．このとき, $n \ge N$ に対して,

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \ =\ |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\
&\le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&\le |a_n|\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 \qquad = |a_n - a + a|\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 \\
&\le |a_n - a|\varepsilon_2 + |a|\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 \ \le\ \varepsilon_1\varepsilon_2 + |a|\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 \ \le\ \varepsilon
\end{aligned}$$

(3) $\forall\varepsilon > 0$ に対して, $\varepsilon_2 < \dfrac{|b|}{2},\quad 2\dfrac{|b|\varepsilon_1 + |a|\varepsilon_2}{b^2} \le \varepsilon$ となるように $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ を選び, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく．このとき, $n \ge N$ に対して,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|a_n b - ab_n|}{|b_n b|} \qquad = \frac{|a_n b - ab + ab - ab_n|}{|b^2 + (b_n - b)b|} \\
&\le \frac{|a_n - a||b| + |a||b - b_n|}{b^2 - |b_n - b||b|} \ \le\ \frac{|b|\varepsilon_1 + |a|\varepsilon_2}{b^2 - \varepsilon_2|b|} \ \le\ 2\frac{|b|\varepsilon_1 + |a|\varepsilon_2}{b^2} \ \le\ \varepsilon
\end{aligned}$$

∎

定理 1.5　$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき,　$\forall n : a_n \le b_n \implies a \le b.$

Proof　前提条件から次の 2 つのことが成立している:

(i)　$\forall\varepsilon_1 > 0,\ \exists N_1\ s.t.\ n \ge N_1 \to |a_n - a| < \varepsilon_1$

(ii)　$\forall\varepsilon_2 > 0,\ \exists N_2\ s.t.\ n \ge N_2 \to |b_n - b| < \varepsilon_2$

背理法により示す．$\varepsilon = \dfrac{a - b}{2} > 0$ と仮定する．$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ を選び, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく．このとき, $n \ge N$ に対して,　$\dfrac{\varepsilon}{2} \ge b_n - b \ge a_n - b = (a_n - a) + (a - b) \ge -\dfrac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon = \dfrac{3}{2}\varepsilon$　矛盾. ∎

定理 1.6

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & if \quad r > 1 \\ 1 & if \quad r = 1 \\ 0 & if \quad |r| < 1 \\ \text{発散する．} \ (\neq \pm\infty) & if \quad r \leq -1 \end{cases}$$

<u>*Proof*</u>

(1) $r > 1$ のとき, $r = 1 + h$ $(h > 0)$ とおく．2 項定理より

$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} h^k \geq 1 + nh$$

であるから, $\forall K \in \mathbf{R}$ に対して, $N > \dfrac{|K|}{h}$ となる番号 N を選ぶと, $\forall n \geq N$ に対して,

$$r^n \geq 1 + nh > |K| \geq K$$

(2) $r = 1$ のとき, $N = 1$ とすると　$\forall \varepsilon > 0,\ n \geq 1 \to |r^n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$

(3) $r = 0$ のとき, $N = 1$ とすると　$\forall \varepsilon > 0,\ n \geq 1 \to |r^n - 0| = 0 < \varepsilon.$

(4) $0 < |r| < 1$ のとき, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $N > \dfrac{\log \varepsilon}{\log |r|}$ となる番号 N を選ぶと, $\forall n \geq N$ に対して

$$|r^n - 0| \leq |r|^n = e^{n \log |r|} \leq e^{N \log |r|} < e^{\log \varepsilon} = \varepsilon \qquad (\ \log |r| < 0\ )$$

(5) $r \leq -1$ のとき, 背理法を用いて示す.

(a) $\lim_{n\to\infty} r^n = a$ と仮定する．

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とおくと,　$\exists N \in \mathbf{N}\ \ s.t.\ \ \forall n \geq N \to |r^n - a| < \dfrac{1}{2}$　とできる．

$r \leq -1$ であるから,　$r^{2N} - r^{2N+1} = r^{2N}(1 - r) \geq 2$　となる．したがって,

$\dfrac{1}{2} > |r^{2N} - a| = |r^{2N} - r^{2N+1} + r^{2N+1} - a| \geq |r^{2N} - r^{2N+1}| - |r^{2N+1} - a| \geq 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$　矛盾.

(b) $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ と仮定する．

$K = 2$ とおくと,　$\exists N \in \mathbf{N}\ \ s.t.\ \ \forall n \geq N \to 2 \leq r^n$　とできる．

$r \leq -1$ であるから,　$-1 \geq r^{2N+1} \geq 2$　矛盾.

(c) $\lim_{n\to\infty} r^n = -\infty$ と仮定する．

$K = -2$ とおくと,　$\exists N\ \ s.t.\ \ \forall n \geq N \to r^n \leq -2$　とできる．

$r \leq -1$ であるから,　$1 \leq r^{2N} \leq -2$　矛盾.　∎

定理 1.7　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ のとき,　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$　である．

<u>*Proof*</u>　前提条件から　$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \ \exists N_1\ \ s.t.\ \ n \geq N_1 \to |a_n - a| < \varepsilon_1$　が成立している．

$$A = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_1-1} - a|\}$$

とし,

任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して,　$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{4}$,　$N = 2\left[\dfrac{N_1 A}{\varepsilon} + 1\right]$　とおく．

ただし, $[\cdot]$ は Gauss 記号である．このとき, $n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \frac{|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots (a_{N_1-1} - a) + (a_{N_1} - a) + \cdots + (a_n - a)|}{n} \\
&\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a| + |a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\
&\leq \frac{A + A + \cdots + A + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_1}{n} \\
&= \frac{(N_1 - 1)A}{n} + \frac{n - N_1}{n}\varepsilon_1 \ < \ \frac{N_1 A}{N} + \varepsilon_1 \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon
\end{aligned}$$

∎

定義 1.8 数列 $\{a_n\}_n$ が

(1) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$ となるとき, **増加列**という.

(2) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$ となるとき, **減少列**という.

(3) “$\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq a$ ” となるとき, **上に有界**という.

(4) “$\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq a$ ” となるとき, **下に有界**という.

例題 1.9 (1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots,$ は有界な増加列である. ($0 \leq a_n \leq 1$)

(2) $2, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \frac{2^5}{5!}, \frac{2^6}{6!}, \cdots, \frac{2^n}{n!}, \cdots,$ は有界な減少列である. ($1 \leq a_n \leq 2$)

次の性質は実数において基本的なことである. (実数の連続性)

定理 1.10 (1) 上に有界な増加列 $\{a_n\}_n$ は収束する. (2) 下に有界な減少列 $\{a_n\}_n$ は収束する.

定理 1.11 次の極限値 e を **Napier(ネイピア)** の数という.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = 2.71828182\cdots := e$$

<u>*Proof*</u> $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする. $\{a_n\}_n$ が上に有界な増加列であることを示そう. 2 項定理より,

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} n^{-k} 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) = (*)
\end{aligned}$$

<u>**(単調増加)** $a_n \leq a_{n+1}$:</u>

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n+1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+2)}{\underbrace{(n+1) \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (n+1)}_{k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k 1^{n+1-k} \\
&< \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k 1^{n+1-k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}
\end{aligned}$$

<u>**(有界性)** $2 \leq a_n \leq 3$:</u> $a_1 = (1+1)^1 = 2$ だから, $2 \leq a_n$. さらに,

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^{k-1} \qquad (k \geq 1)$$ であることを利用すると,

$$(*) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

したがって, 極限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ が存在することが分る. また,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

∎

演習問題 6　(1)　次の極限を求めよ．(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$

(2)
$$\exists r\in(0,1),\exists N\in\mathbf{N}\quad s.t.\quad \forall n\geq N\to|a_{n+1}-a|\leq r|a_n-a|$$
が成立しているとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ であることを示せ．($\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ を利用する.)

2　連続関数と逆関数

2.1　連続関数

関数の極限と連続性　ある区間 (b,c) で定義された実数値関数 $f(x)$ に関しても数列のときと同様に極限が定義され, 連続性についても定義される.

定義 2.1(ε-δ 論法)　$a\in(b,c)$ とする.

(1)　$f(x)$ が $x=a$ で**右側極限値** l をもつとは,

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0\quad s.t.\quad x\in(b,c),\ 0<x-a<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon$$ が成り立つことであり,

このとき $\displaystyle l=\lim_{x\to a+}f(x)\quad(=\lim_{x\downarrow a}f(x))$ と書く.

また. $\displaystyle f(a)=\lim_{x\to a+}f(x)$ となるとき,

$f(x)$ は $x=a$ で**右連続**であるという.

(2)　$f(x)$ が $x=a$ で**左側極限値** l をもつとは,

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0\quad s.t.\quad x\in(b,c),\ -\delta<x-a<0\to|f(x)-l|<\varepsilon$$ が成り立つことであり,

このとき $\displaystyle l=\lim_{x\to a-}f(x)\quad(=\lim_{x\uparrow a}f(x))$ と書く.

また, $\displaystyle f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)$ となるとき,

$f(x)$ は $x=a$ で**左連続**であるという.

(3)　$f(x)$ が $x=a$ で**極限値** l をもつとは,

$$l=\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$$

が成り立つことであり，このとき $\displaystyle l=\lim_{x\to a}f(x)$ と書く．また,

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$$

となるとき，$f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという．これは ε-δ 論法で表すと次のようになる.

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0\quad s.t.\quad\forall x\in(b,c),\ |x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

(4)　任意の $a\in(b,c)$ に関して，$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとき，$f(x)$ は (b,c) 上**連続**であるという.

例題 2.2　(1)　$f(x)=[x]$ は $\mathbf{R}$ 上右連続である.

(2)　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ;x\neq0\\ 1 & ;x=0\end{cases}$ は $\mathbf{R}$ 上連続である.

(3)　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|(x+1)}{x} & ;x\neq0\\ 1 & ;x=0\end{cases}$ は $\mathbf{R}$ 上右連続である.

連続関数の基本性質

定理 2.3 $f(x), g(x)$ が $x=a\in(b,c)$ で連続ならば，次の関数も $x=a$ で連続である．

$$(1)\ \ \alpha f(x)+\beta g(x) \qquad (\alpha,\beta\text{は定数.}) \qquad (2)\ \ f(x)g(x) \qquad (3)\ \ \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(a)\neq 0).$$

Proof 前提条件から次の 2 つのことが成立している:

$$\text{(i)} \qquad \forall\varepsilon_1>0,\ \exists\delta_1>0\ \ s.t.\ \ x\in(b,c),\ |x-a|<\delta_1 \to |f(x)-f(a)|<\varepsilon_1$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall\varepsilon_2>0,\ \exists\delta_2>0\ \ s.t.\ \ x\in(b,c),\ |x-a|<\delta_2 \to |g(x)-g(a)|<\varepsilon_2$$

(1) $\forall\varepsilon>0$ に対して，$|\alpha|\varepsilon_1+|\beta|\varepsilon_2\le\varepsilon$ となるように $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ を選び，$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおく．このとき，$|x-a|<\delta$ なる $\forall x\in(b,c)$ に対して

$$\begin{aligned} |(\alpha f(x)+\beta g(x))-(\alpha f(a)+\beta g(a))| &= |\alpha(f(x)-f(a))+\beta(g(x)-g(a))| \\ &\le |\alpha||f(x)-f(a)|+|\beta||g(x)-g(a)| \ \le\ |\alpha|\varepsilon_1+|\beta|\varepsilon_2 \ \le\ \varepsilon \end{aligned}$$

(2) $\forall\varepsilon>0$ に対して，$(\varepsilon_1+|f(a)|)\varepsilon_2+|g(a)|\varepsilon_1\le\varepsilon$ となるように $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ を選び，$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおく．このとき，$|x-a|<\delta$ なる $\forall x\in(b,c)$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-f(a)g(a)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)| \\ &\le |f(x)||g(x)-g(a)|+|f(x)-f(a)||g(a)| \\ &\le (|f(x)-f(a)|+|f(a)|)\varepsilon_2+\varepsilon_1|g(a)| \ \le\ (\varepsilon_1+|f(a)|)\varepsilon_2+|g(a)|\varepsilon_1 \ \le\ \varepsilon \end{aligned}$$

(3) $\forall\varepsilon>0$ に対して，$\varepsilon_2<\dfrac{|g(a)|}{2},\quad 2\dfrac{|g(a)|\varepsilon_1+|f(a)|\varepsilon_2}{g(a)^2}\le\varepsilon$ となるように $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ を選び，$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおく．このとき，$|x-a|<\delta$ なる $\forall x\in(b,c)$ に対して

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right| &= \frac{|f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)|}{|g(x)g(a)|} \\ &\le \frac{|f(x)-f(a)||g(a)|+|f(a)||g(a)-g(x)|}{|g(x)-g(a)+g(a)||g(a)|} \\ &\le \frac{\varepsilon_1|g(a)|+|f(a)|\varepsilon_2}{g(a)^2-\varepsilon_2|g(a)|} \qquad \le\ 2\frac{\varepsilon_1|g(a)|+|f(a)|\varepsilon_2}{g(a)^2}\ \le\ \varepsilon \end{aligned}$$

■

定理 2.4 (c,d) 上定義された関数 $f(x)$ と (c',d') 上定義された関数 $g(x)$ に関して，$f(x)$ が $x=a\in(c,d)$ で連続，$g(y)$ が $y=f(a)\in(c',d')$ で連続であるとき，合成関数 $g(f(x))$ は $x=a$ で連続である．

Proof $b=f(a)\in(c',d')$ とおく．前提条件から次の 2 つのことが成立している:

$$\text{(i)} \qquad \forall\varepsilon_1>0,\ \exists\delta_1>0\ \ s.t.\ \ x\in(c,d),\ |x-a|<\delta_1 \to |f(x)-b|<\varepsilon_1$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall\varepsilon_2>0,\ \exists\delta_2>0\ \ s.t.\ \ y\in(c',d'),\ |y-b|<\delta_2 \to |g(y)-g(b)|<\varepsilon_2$$

$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\varepsilon_2=\varepsilon,\ \ \varepsilon_1=\min\{b-c',\ d'-b,\ \delta_2\}$, となるように $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ を選び，$\delta=\delta_1$ とおく．このとき，$|x-a|<\delta$ なる $\forall x\in(c,d)$ に対して, $y=f(x)\in(c',d')$ かつ $|f(x)-b|<\delta_2$ であるから,

$$|g(f(x))-g(f(a))|=|g(y)-g(b)|<\varepsilon$$

■

定理 2.5(中間値の定理) 閉区間 $[a,b]$ 上連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$f(a)<\gamma<f(b)\quad (\text{または}\ \ f(a)>\gamma>f(b)) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists c\in(a,b)\quad s.t.\quad f(c)=\gamma.$$

<u>*Proof*</u>　$f(a) < \gamma < f(b)$ とする．以下のようにして数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を定義する．

(1)　$a_1 = a, \qquad b_1 = b, \qquad c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

(2)
$$\left.\begin{array}{lll} f(c_1) \geq \gamma & \Longrightarrow & a_2 = a_1,\ \ b_2 = c_1,\ \ c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2} \\ f(c_1) < \gamma & \Longrightarrow & a_2 = c_1,\ \ b_2 = b_1,\ \ c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a_2) < \gamma \leq f(b_2) \qquad \left(b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}\right)$$

(3)
$$\left.\begin{array}{lll} f(c_2) \geq \gamma & \Longrightarrow & a_3 = a_2,\ \ b_3 = c_2,\ \ c_3 = \dfrac{a_3+b_3}{2} \\ f(c_2) < \gamma & \Longrightarrow & a_3 = c_2,\ \ b_3 = b_2,\ \ c_3 = \dfrac{a_3+b_3}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a_3) < \gamma \leq f(b_3) \qquad \left(b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^2}\right)$$

(4)
$$\left.\begin{array}{lll} f(c_{n-1}) \geq \gamma & \Longrightarrow & a_n = a_{n-1},\ \ b_n = c_{n-1},\ \ c_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \\ f(c_{n-1}) < \gamma & \Longrightarrow & a_n = c_{n-1},\ \ b_n = b_{n-1},\ \ c_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a_n) < \gamma \leq f(b_n)$$
$$\left(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}\right)$$

このとき，$a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b$ で，

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 \qquad as \qquad n \to \infty$$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n := c \in [a,b]$ とおく．$f(x)$ は $[a,b]$ 上連続で，$f(a_n) < \gamma \leq f(b_n)$ であるから，

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq \gamma \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \qquad i.e.\ \ f(c) = \gamma.$$

$f(a) \neq \gamma$,　$f(b) \neq \gamma$ であるから，$c \in (a,b)$. ∎

定義 2.6　ある区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ について，

(1)　M が次の 2 つの条件を満たすとき $f(x)$ の**上限**であるといい，$\displaystyle\sup_{x\in I} f(x)$ と書く．

- $\forall x \in I\ ;\ f(x) \leq M$
- $\exists K\ \ s.t.\ \ \forall x \in I\ ;\ f(x) \leq K \Longrightarrow M \leq K$

また，$\displaystyle\sup_{x\in I} f(x) < \infty$ のとき，$f(x)$ は**上に有界**であるという．

(2)　m が次の 2 つの条件を満たすとき $f(x)$ の**下限**であるといい，$\displaystyle\inf_{x\in I} f(x)$ と書く．

- $\forall x \in I\ ;\ f(x) \geq m$
- $\exists k\ \ s.t.\ \ \forall x \in I\ ;\ f(x) \geq k \Longrightarrow m \geq k$

また，$\displaystyle\inf_{x\in I} f(x) > -\infty$ のとき，$f(x)$ は**下に有界**であるという．

(3)　ある $x^* \in I$ があって $f(x^*) = \displaystyle\sup_{x\in I} f(x)$ となるとき，$f(x^*)$ を**最大値**といい，$\displaystyle\max_{x\in I} f(x)$ と書く．

(4)　ある $x_* \in I$ があって $f(x_*) = \displaystyle\inf_{x\in I} f(x)$ となるとき，$f(x_*)$ を**最小値**といい，$\displaystyle\min_{x\in I} f(x)$ と書く．

例題 2.7　$f(x) = x^3$,　$I = [0,1)$ のとき，

$$\begin{cases} \displaystyle\sup_{x\in I} f(x) = 1 \\ \displaystyle\inf_{x\in I} f(x) = \min_{x\in I} f(x) = f(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(最大値は存在しない)}.$$

定理 2.8　$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上連続ならばこの区間で，最大値・最小値をもつ．

Proof　最大値について示す．(最小値についても同様.) $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$,　$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ とおく．

1st Step: $M < \infty$　背理法により示す．$M = \infty$ とすると，

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad \exists x_k \in [a,b] \qquad s.t. \qquad f(x_k) > k \qquad \text{となるので,} \qquad y_n := \sup_{k\geq n} x_k \quad \in [a,b] \qquad \text{とおく.}$$

$\{y_n\}_n$ は単調減少列で下に有界だから極限値 $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in [a,b]$ が存在する．$y \in [a,b]$ より，$f(y) < \infty$．一方，$f(x)$ は $[a,b]$ 上連続だから，

$$f(y) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(\sup_{k\geq n} x_k) \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \text{矛盾.}$$

2nd Step: $\exists x^* \in [a,b]\ \ s.t.\ \ f(x^*) = M$　　$M \neq m$ と仮定する．($M = m$ のときは，$f(x) \equiv M = m$ より自明．) 上限の定義より，

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \exists c_k \in [a,b]\ \ s.t. \quad M - \frac{M-m}{2^k} \leq f(c_k) \leq M \qquad \text{となるので,} \qquad d_n := \sup_{k\geq n} c_k \quad \in [a,b] \qquad \text{とおく.}$$

$\{d_n\}_n$ は単調減少列で下に有界だから極限値 $\lim_{n\to\infty} d_n = x^* \in [a,b]$ が存在する．$f(x)$ は $[a,b]$ 上連続だから，

$$M \geq f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} d_n) = \lim_{n\to\infty} f(d_n) = \lim_{n\to\infty} f(\sup_{k\geq n} c_k) \geq \lim_{n\to\infty} \left(M - \frac{M-m}{2^n}\right) = M$$

∎

演習問題 7

(1)　$[a,b]$ 上の連続関数 $f(x), g(x)$ に対して $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ も $[a,b]$ 上連続であることを示せ．

(2)　$f(x) = 8x^3 - 6x + 1 = 0$ は区間 $[-1,1]$ において 3 つの実数解をもつことを示せ．
(中間値の定理を利用)

2.2　逆関数

定義 2.9　$f(x)$ を区間 I 上の関数とする．

(1)
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$
を満たすとき $f(x)$ は **(狭義) 単調増加**であるという．

(2)
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$
を満たすとき $f(x)$ は **(狭義) 単調減少**であるという．

$I = [a,b]$ 上連続な狭義単調増加 (減少) 関数 $f(x)$ に対して $J = [f(a), f(b)]$ とおく. このとき

$$y = f(x), \quad x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y), \quad y \in J$$

となる J 上の連続な狭義単調増加 (減少) 関数 $f^{-1}(y)$ が唯一つ存在する．これを $f(x)$ の**逆関数**と呼ぶ.
したがって, $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = x$ に関して対称になる.

例題 2.10　$I = (0,\infty)$ 上の連続関数 $y = f(x) = \log x$ は狭義単調増加で逆関数は

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in J \iff y = f(x), \quad x \in I \iff y = \log x, \quad x \in (0,\infty)$$
$$\iff x = e^y, \quad y \in (-\infty,\infty) \iff f^{-1}(y) = e^y, \quad y \in J = \mathbf{R}.$$

例題 2.11　$\mathbf{R}$ 上の連続関数 $y=f(x)=x^2$ は狭義単調増加 (減少) ではないが,

$$\begin{aligned} f &: I_1=[0,\infty) \quad \text{上狭義単調増加} \\ f &: I_2=(-\infty,0] \quad \text{上狭義単調減少} \end{aligned}$$

であるから各区間で考えて

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in J_1 \iff y=f(x),\quad x\in I_1 \iff y=x^2,\quad x\in[0,\infty)$$
$$\iff x=\sqrt{y},\quad y\in[0,\infty) \iff f^{-1}(y)=\sqrt{y},\quad y\in J_1=[0,\infty)$$
$$x=f^{-1}(y),\quad y\in J_2 \iff y=f(x),\quad x\in I_2 \iff y=x^2,\quad x\in(-\infty,0]$$
$$\iff x=-\sqrt{y},\quad y\in[0,\infty) \iff f^{-1}(y)=-\sqrt{y},\quad y\in J_2=[0,\infty)$$

定義 2.12　三角関数についても次のようにして逆関数を定義できる.

(1)　**逆正弦関数 (アークサイン):**　$y=\sin^{-1}x$

関数 $y=\sin x,\quad x\in I=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$　は狭義単調増加関数だから, その逆関数が存在する.
これを “ $y=\sin^{-1}x$ ” と書き, 逆正弦関数 (アークサイン) と呼ぶ.

$$\left.\begin{array}{l} y=\sin x \\ \quad \text{定義域}\quad \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \quad \text{値　域}\quad [-1,1] \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y=\sin^{-1}x \\ \quad \text{定義域}\quad [-1,1] \\ \quad \text{値　域}\quad \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

(2)　**逆余弦関数 (アークコサイン):**　$y=\cos^{-1}x$

関数 $y=\cos x,\quad x\in I=[0,\pi]$　は狭義単調減少関数だから, その逆関数が存在する.
これを “ $y=\cos^{-1}x$ ” と書き, 逆余弦関数 (アークコサイン) と呼ぶ.

$$\left.\begin{array}{l} y=\cos x \\ \quad \text{定義域}\quad [0,\pi] \\ \quad \text{値　域}\quad [-1,1] \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y=\cos^{-1}x \\ \quad \text{定義域}\quad [-1,1] \\ \quad \text{値　域}\quad [0,\pi] \end{array}\right.$$

(3)　**逆正接関数 (アークタンジェント):**　$y=\tan^{-1}x$

関数 $y=\tan x,\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ は増加関数だから, その逆関数が存在する.
これを “ $y=\tan^{-1}x$ ” と書き, 逆正接関数 (アークタンジェント) と呼ぶ.

$$\left.\begin{array}{l} y=\tan x \\ \quad \text{定義域}\quad \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \quad \text{値　域}\quad (-\infty,\infty) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y=\tan^{-1}x \\ \quad \text{定義域}\quad (-\infty,\infty) \\ \quad \text{値　域}\quad \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

例題 2.13

(1)　$y=\sin^{-1}\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin y=\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y=\dfrac{\pi}{6} \qquad \therefore\ \sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

(2)　$y=\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \cos y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad y=\dfrac{3}{4}\pi \qquad \therefore\ \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{3}{4}\pi$

(3)　$y=\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \tan y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad\Leftrightarrow\quad y=-\dfrac{\pi}{6} \qquad \therefore\ \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

演習問題 8　次の値を求めよ.

(1)　$\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(2)　$\cos^{-1}\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan^{-1}1$

定義 2.14 次の (1) ~ (3) の関数を総称して**双曲線関数**と呼ぶ.

(1) *hyperbolic sine* : $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$

(2) *hyperbolic cosine* : $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$

(3) *hyperbolic tangent* : $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}$

(4) *hyperbolic cotangent* : $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$

注釈 2.15 $\forall z \in \mathbf{C}$ について,

オイラーの公式 : $e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$ より

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}\sinh(z\sqrt{-1}), \qquad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cosh(z\sqrt{-1}).$$

双曲線関数は三角関数と類似の次の関係式を満たす.

命題 2.16 (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \quad \coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(3) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$

演習問題 9 (1) 命題 2.16 を示せ.

(2) 逆双曲線関数 $\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$, $\coth^{-1} x$ を求めよ.

3 微分

3.1 微分法と微分公式

$f(x)$ を開区間 I 上の関数とし, $a \in I$ とする.

定義 3.1

(1) **右側微分係数** : $f'_+(a) := \displaystyle\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ で**右側微分可能**であるという.

(2) **左側微分係数** : $f'_-(a) := \displaystyle\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ で**左側微分可能**であるという.

(3) **微分係数** : $f'(a) := f'_+(a) = f'_-(a)$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるという.

(4) $\forall a \in I$ で $f(x)$ が微分可能であるとき, $f(x)$ は I 上**微分可能**であるという.

$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ は点 $(a, f(a))$ と $(a+h, f(a+h))$ を通る直線の傾きだから,

$f'(a) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ は点 $x = a$ における $f(x)$ の接線の傾きを表している.

つまり $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるということは, $f(x)$ は $x = a$ の近くで 1 次関数 (直線=接線) でうまく近似できるということである. この概念を一般化し, 多項式近似を与える定理が次節の Taylor の定理である.

定理 3.2　$f(x)$ が $x=a$ で右 (左) 側微分可能ならば, $x=a$ で右 (左) 連続である.

<u>*Proof*</u>　右側微分可能であるから $f'_+(a)$ は存在する.

$$\lim_{h\to 0+} f(a+h) \;=\; \lim_{h\to 0+}\left(\underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ f'_+(a)}}\cdot \underbrace{h}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + f(a)\right) \;=\; f(a)$$

∎

<u>*Proof*</u>　(ε-δ論法) 右側微分可能であるから,

$$\forall\varepsilon_1>0,\ \exists\delta_1>0\ \ s.t.\ \ 0<h<\delta_1,\ a+h\in I \longrightarrow \left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|<\varepsilon_1$$

が成立している. $\forall\varepsilon>0$ に対して, $\delta=\min\left\{\delta_1,\ \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1+|f'(a)|}\right\}$ とおく. $a+h\in I$ となる $h\in(0,\delta)$ に対して

$$\begin{aligned}|f(a+h)-f(a)| &= \left|\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right)h+f'(a)h\right| \\ &\le \left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|h+|f'(a)|h \;<\; (\varepsilon_1+|f'(a)|)\delta \;\le\; \varepsilon\end{aligned}$$

左連続に関しても同様に証明できる. ∎

上の定理から　“ 微分可能 $\Longrightarrow$ 連続 ”　であるが, 逆は必ずしも成立しない.
実際, $f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続であるが, $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$ であるから $x=0$ で微分不可能である.

数列に関する定理 1.4, 連続関数に関する定理 2.3 と同様に次の性質が成り立つ.

定理 3.3　開区間 I 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x=a\in I$ で微分可能であるならば, 次のことが成立する.

(1)　$\{\alpha f(a)+\beta g(a)\}'=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$　　(α, β は定数)

(2)　$\{f(a)g(a)\}'=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

(3)　$\left\{\dfrac{f(a)}{g(a)}\right\}'=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$　　($g(a)\neq 0$ とする)

<u>*Proof*</u>　定理 1.4 と定理 2.3 の結果を利用すると高等学校で習ったとおりの論法で証明できる. ∎

定理 3.4(合成関数の微分法)　開区間 I 上の関数 $y=f(x)$ は $x=a\in I$ で微分可能, 開区間 $J(\subset f(I))$ 上の関数 $z=g(y)$ は $y=b=f(a)\in J$ で微分可能とする. このとき,

$$\{g(f(a))\}'=g'(f(a))f'(a) \qquad i.e.\ \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\quad .$$

<u>*Proof*</u>　$k=f(a+h)-f(a)$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(b+k)-g(b)}{k}\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{g(b+k)-g(b)}{k}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=g'(b)f'(a)=g'(f(a))f'(a)\end{aligned}$$

∎

Proof (ε-δ論法) 仮定から

$$\forall\varepsilon_1>0,\ \exists\delta_1>0\ \ s.t.\ \ 0<|h|<\delta_1,\ a+h\in I\longrightarrow\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|<\varepsilon_1$$
$$\forall\varepsilon_2>0,\ \exists\delta_2>0\ \ s.t.\ \ 0<|k|<\delta_2,\ b+k\in J\longrightarrow\left|\frac{g(b+k)-g(b)}{k}-g'(b)\right|<\varepsilon_2$$

が成立している. $\forall\varepsilon>0$ に対して, $|f'(a)|\varepsilon_2<\varepsilon,\ \varepsilon_1<\min\left\{\delta_2,\dfrac{\varepsilon-|f'(a)|\varepsilon_2}{\varepsilon_2+|g'(b)|}\right\}$ となる $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ を選び, $\delta=\delta_1$ とおく. $0<|h|<\delta,\ a+h\in I$ となる h に対して $k=f(a+h)-f(a)$ とおくと, $|k|=|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon_1<\delta_2$ であるから,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}-g'(f(a))f'(a)\right| &= \left|\frac{g(b+k)-g(b)}{k}\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-g'(b)f'(a)\right|\\
&= \left|\left(\frac{g(b+k)-g(b)}{k}-g'(b)\right)\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right)\right.\\
&\qquad\left.+f'(a)\left(\frac{g(b+k)-g(b)}{k}-g'(b)\right)+g'(b)\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right)\right|\\
&= \left|\frac{g(b+k)-g(b)}{k}-g'(b)\right|\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|\\
&\qquad+|f'(a)|\left|\frac{g(b+k)-g(b)}{k}-g'(b)\right|+|g'(b)|\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|\\
&\le \varepsilon_2\varepsilon_1+|f'(a)|\varepsilon_2+|g'(b)|\varepsilon_1\ <\ \varepsilon
\end{aligned}$$

■

定理 3.5(逆関数の微分法) 開区間 I 上で連続な狭義単調増加 (減少) 関数 $y=f(x)$ は $x=a\in I$ で微分可能で, $f'(a)\neq 0$ とする. このとき, 逆関数 $f^{-1}(y)$ は $y=b=f(a)$ で微分可能で

$$\{f^{-1}(b)\}'=\frac{1}{f'(a)}\qquad i.e.\ \ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\quad .$$

Proof $h=f^{-1}(b+k)-a$ とおくと, f^{-1} は連続だから $\lim\limits_{k\to 0}h=\lim\limits_{k\to 0}f^{-1}(b+k)-a=a-a=0$ である.

$$f^{-1}(b+k)=a+h\ \Leftrightarrow\ b+k=f(a+h)\quad i.e\ \ k=f(a+h)-b=f(a+h)-f(a)$$

であるから

$$\lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(b+k)-f^{-1}(b)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{f(a+h)-f(a)}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}=\frac{1}{f'(a)}$$

■

Proof (ε-δ論法) 仮定から

$$\forall\varepsilon_1>0,\ \exists\delta_1>0\ \ s.t.\ \ 0<|h|<\delta_1,\ a+h\in I\longrightarrow\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|<\varepsilon_1$$

が成立している. $\forall\varepsilon>0$ に対して, $\varepsilon_1<\dfrac{1}{2}\min\left\{\dfrac{|f'(a)|}{2},\ \dfrac{|f'(a)|^2}{2}\varepsilon\right\}$ となる $\varepsilon_1>0$ を選び, $\delta=\delta_1$ とおく. $0<|h|<\delta,\ a+h\in I$ となる h に対して $k=f(a+h)-f(a)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^{-1}(b+k)-f^{-1}(b)}{k}-\frac{1}{f'(a)}\right| &= \left|\frac{f^{-1}(f(a+h))-f^{-1}(f(a))}{k}-\frac{1}{f'(a)}\right|\\
&= \left|\frac{h}{f(a+h)-f(a)}-\frac{1}{f'(a)}\right| = \frac{\left|f'(a)-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|}{|f'(a)|\left|f'(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|}\\
&\le \frac{\varepsilon_1}{|f'(a)|^2-\varepsilon_1|f'(a)|}\ \le\ \frac{2\varepsilon_1}{|f'(a)|^2}\ <\ \varepsilon
\end{aligned}$$

■

例題 3.6　初等関数の微分係数

(1)　$\{x^n\}' = nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbf{Z}) \quad or \quad (x > 0, n \in \mathbf{R})$

(2)　$\{\sin x\}' = \cos x, \qquad \{\cos x\}' = -\sin x, \qquad \{\tan x\}' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(3)　$\{\log |x|\}' = \dfrac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$

(4)　$\{e^x\}' = e^x, \qquad \{\sinh x\}' = \cosh x, \qquad \{\cosh x\}' = \sinh x, \qquad \{\tanh x\}' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

例題 3.7　逆関数の微分係数

(1)　$\{\sin^{-1} x\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \qquad \{\cos^{-1} x\}' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$

$\{\tan^{-1} x\}' = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad \{\cot^{-1} x\}' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

(2)　$\{\sinh^{-1} x\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \{\cosh^{-1} x\}' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}} \ (|x| > 1), \quad \{\tanh^{-1} x\}' = \dfrac{1}{1-x^2} \ (|x| \neq 1)$

演習問題 10　(1)　例題 3.7 を示せ.　　(2)　$\{\coth^{-1} x\}'$ を求めよ.

3.2　平均値の定理と応用

本小節では関数の極大・極小と微分係数の関係, Roll の定理, 平均値の定理について述べる.
$f(x)$ を開区間 I 上の関数とし, $a \in I$ とする.

定義 3.8

(1)　$f(x)$ が $x = a$ で**極大**であるとは,

$$\exists\delta > 0 \ \ s.t. \ \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \subset I, \ \ x \neq a \quad \to \quad f(x) < f(a)$$

が成り立つことである. このとき $f(a)$ を**極大値**と呼ぶ.

(2)　$f(x)$ が $x = a$ で**極小**であるとは,

$$\exists\delta > 0 \ \ s.t. \ \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \subset I, \ \ x \neq a \quad \to \quad f(x) > f(a)$$

が成り立つことである. このとき $f(a)$ を**極小値**と呼ぶ.

極大値と極小値をあわせて**極値**と呼ぶ.

I 上微分可能な関数 $f(x)$ が,
$x = a$ で極大であるとすると, $\exists\delta > 0 \ s.t. \ \forall h \in (0, \delta)$,

$$\left.\begin{array}{l} f(a-h) < f(a) \quad \to \quad \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h} > 0 \quad \to \quad f'_-(a) = \displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h} \geq 0 \\ f(a+h) < f(a) \quad \to \quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0 \quad \to \quad f'_+(a) = \displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0 \end{array}\right\} \to f'(a) = 0$$

$x = a$ で極小であるとすると, $\exists\delta > 0 \ s.t. \ \forall h \in (0, \delta)$,

$$\left.\begin{array}{l} f(a-h) > f(a) \quad \to \quad \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h} < 0 \quad \to \quad f'_-(a) = \displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h} \leq 0 \\ f(a+h) > f(a) \quad \to \quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \quad \to \quad f'_+(a) = \displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0 \end{array}\right\} \to f'(a) = 0$$

が成り立つ. つまり,　　$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる $\implies f'(a) = 0$.
逆は必ずしも成立しない. 実際 $f(x) = x^3$ とすると, $f'(0) = 0$ であるが $f(0)$ は極値にならない.

定理 3.9(Roll の定理) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上連続, 開区間 (a,b) 上微分可能であるとする．このとき,

$$f(a)=f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists c\in(a,b) \quad s.t. \quad f'(c)=0.$$

<u>*Proof*</u>　$f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上連続だから定理 2.7 より, 最大値 M と 最小値 m をとる.

$$\begin{array}{llllll} m=f(a)=f(b)=M & \Rightarrow & \forall c\in(a,b); & & f(c)=M & \Rightarrow & f'(c)=0 \\ m\le f(a)=f(b)<M & \Rightarrow & \exists c\in(a,b) & s.t. & f(c)=M & \Rightarrow & f'(c)=0 \\ m< f(a)=f(b)\le M & \Rightarrow & \exists c\in(a,b) & s.t. & f(c)=m & \Rightarrow & f'(c)=0 \end{array}$$

∎

定理 3.10(平均値の定理) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上連続, 開区間 (a,b) 上微分可能であるとする．このとき,

$$\exists c\in(a,b) \quad s.t. \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{3.1}$$

<u>*Proof*</u>　$x\in[a,b]$ に対して

$$F(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

とおくと $F(x)$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であり, $F(b)=F(a)=0$ だから,Roll の定理より, ある $c\in(a,b)$ が存在して, $F'(c)=0$ となる．よって,

$$F'(c)=-f'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \qquad i.e. \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

∎

平均値の定理の式 (3.1) は次のように表現することもできる.

$$\exists\theta\in(0,1) \quad s.t. \quad f(b)=f(a)+f'(a+\theta(b-a))(b-a). \tag{3.2}$$

定理 3.11(Cauchy の平均値の定理) 関数 $f(x),g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上連続, 開区間 (a,b) 上微分可能であるとする．このとき,

$$\forall x\in(a,b); g'(x)\ne 0 \Longrightarrow \begin{cases} (1) \quad g(a)\ne g(b) \\ (2) \quad \exists c\in(a,b) \quad s.t. \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}. \end{cases}$$

<u>*Proof*</u>　最初に Roll の定理より $g(a)\ne g(b)$ がわかる. つぎに $x\in[a,b]$ に対して

$$G(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(x))$$

とおくと $G(x)$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であり, $G(b)=G(a)=0$ だから,Roll の定理より, ある $c\in(a,b)$ が存在して, $G'(c)=0$ となる．よって,

$$G'(c)=-f'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) \qquad i.e. \quad \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

∎

不定形の極限値　　極限を形式的に書くと $\left\{\dfrac{0}{0}, \ \dfrac{\infty}{\infty}, \ 0\cdot\infty, \ \infty-\infty, \cdots\right\}$ と表せる場合がある．これらを総称して不定形の極限という．不定形の極限値の計算方法の 1 つが次の定理である.

定理 3.12(L′Hospital の定理) $a<c<b$ とする.

(1)　関数 $f(x),g(x)$ が開区間 (a,b) 上微分可能で $f(c)=g(c)=0$ であるとき,

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

(2)　関数 $f(x),g(x)$ が開区間 $(a,c),(c,b)$ 上微分可能で
$g'(x)\ne 0\,(\forall x\in(a,c)\cup(c,b))$, $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$ であるとき,

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

(3)　$b = +\infty$ のとき, $c = +\infty$ のについても $(1), (2)$ と同じことが成り立つ.

(4)　$a = -\infty$ のとき, $c = -\infty$ のについても $(1), (2)$ と同じことが成り立つ.

<u>*Proof*</u>

(1)　平均値の定理 (数式 (3.2)) より $\forall x \in (c, b),\quad \exists \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)\quad s.t.$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c + \theta_1(x - c))(x - c) = f'(c + \theta_1(x - c))(x - c) \\ g(x) &= g(c) + g'(c + \theta_2(x - c))(x - c) = g'(c + \theta_2(x - c))(x - c) \end{aligned}$$

が成立する. よって

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c+} \frac{f'(c + \theta_1(x - c))}{g'(c + \theta_2(x - c))} = L.$$

同様に, $\forall x \in (a, c),\quad \exists \theta_1', \theta_2' \in (0, 1)\quad s.t.$

$$\begin{aligned} f(c) &= f(x) + f'(x + \theta_1'(c - x))(c - x) = f'(x + \theta_1'(c - x))(c - x) \\ g(c) &= g(x) + g'(x + \theta_2'(c - x))(c - x) = g'(x + \theta_2'(c - x))(c - x) \end{aligned}$$

が成立する. よって

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c-} \frac{f'(x + \theta_1'(c - x))}{g'(x + \theta_2'(c - x))} = L.$$

(2)　$|L| < \infty$ とすると, $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ より, $\forall \varepsilon_1 > 0,\quad \exists \delta_1 > 0\quad s.t.$

$$\forall x \in (c - \delta_1, c + \delta_1) \subset (a, b),\quad x \neq c \longrightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon_1.$$

また, Cauchy の平均値の定理より,

$$\forall x \in (c - \delta_1, c), \qquad \exists \xi_1 \in (c - \delta_1, x) \qquad s.t. \qquad \frac{f(x) - f(c - \delta_1)}{g(x) - g(c - \delta_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \in (L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$$

$$\forall x \in (c, c + \delta_1), \qquad \exists \xi_2 \in (x, c + \delta_1) \qquad s.t. \qquad \frac{f(c + \delta_1) - f(x)}{g(c + \delta_1) - g(x)} = \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)} \in (L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$$

が成立する. また $\displaystyle\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$ より $\forall \varepsilon_2 \in (0, 1),\quad \exists \delta_2 > 0\quad s.t.$

$$\forall x \in (c - \delta_2, c + \delta_2) \subset (a, b),\quad x \neq c \longrightarrow \left| \frac{f'(c - \delta_1)}{f(x)} \right| + \left| \frac{f'(c + \delta_1)}{f(x)} \right| + \left| \frac{g'(c - \delta_1)}{g(x)} \right| + \left| \frac{g'(c + \delta_1)}{g(x)} \right| < \varepsilon_2.$$

よって $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $3\varepsilon_1 + 2|L|\varepsilon_2 < \varepsilon$ を満たすように $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \frac{1}{2})$ を選び, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと, $\forall x \in (c - \delta, c)$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &= \left| \frac{f(x) - f(c - \delta_1)}{g(x) - g(c - \delta_1)} \frac{1 - \frac{g(c - \delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c - \delta_1)}{f(x)}} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \frac{1 - \frac{g(c - \delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c - \delta_1)}{f(x)}} - L \right| \\ &\leq \left| \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} - L \right| \left| \frac{1 - \frac{g(c - \delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c - \delta_1)}{f(x)}} \right| + |L| \frac{\left| \frac{f(c - \delta_1)}{f(x)} - \frac{g(c - \delta_1)}{g(x)} \right|}{\left| 1 - \frac{f(c - \delta_1)}{f(x)} \right|} \\ &< \varepsilon_1 \frac{1 + \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} + |L| \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} < 3\varepsilon_1 + 2|L|\varepsilon_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

$$i.e. \qquad \lim_{x \to c-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

同様に, $\forall x \in (c, c+\delta)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &= \left|\frac{f(c+\delta_1)-f(x)}{g(c+\delta_1)-g(x)}\frac{1-\frac{g(c+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)}} - L\right| = \left|\frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)}\frac{1-\frac{g(c+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)}} - L\right| \\ &\leq \left|\frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)} - L\right|\left|\frac{1-\frac{g(c+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)}}\right| + |L|\frac{\left|\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)} - \frac{g(c+\delta_1)}{g(x)}\right|}{\left|1-\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)}\right|} \\ &< \varepsilon_1\frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} + |L|\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} < 3\varepsilon_1 + 2|L|\varepsilon_2 < \varepsilon\end{aligned}$$

$$i.e. \qquad \lim_{x\to c+}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$L = +\infty$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ より, $\forall M > 0,\ \ \exists\delta_1 > 0\ \ s.t.$

$$\forall x \in (c-\delta_1, c+\delta_1) \subset (a,b),\ \ x \neq c \longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 2M.$$

また, Cauchy の平均値の定理より,

$$\forall x \in (c-\delta_1, c), \qquad \exists\xi_1 \in (c-\delta_1, x) \qquad s.t. \qquad \frac{f(x)-f(c-\delta_1)}{g(x)-g(c-\delta_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \geq 2M$$

$$\forall x \in (c, c+\delta_1), \qquad \exists\xi_2 \in (x, c+\delta_1) \qquad s.t. \qquad \frac{f(c+\delta_1)-f(x)}{g(c+\delta_1)-g(x)} = \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)} \geq 2M$$

が成立する. また $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$ より $\forall\varepsilon \in (0,1),\ \ \exists\delta_2 > 0\ \ s.t.$

$$\forall x \in (c-\delta_2, c+\delta_2) \subset (a,b),\ \ x \neq c \longrightarrow \left|\frac{f'(c-\delta_1)}{f(x)}\right| + \left|\frac{f'(c+\delta_1)}{f(x)}\right| + \left|\frac{g'(c-\delta_1)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g'(c+\delta_1)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

よって $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと, $\forall x \in (c-\delta, c)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c-\delta_1)}{g(x)-g(c-\delta_1)}\frac{1-\frac{g(c-\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c-\delta_1)}{f(x)}} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}\frac{1-\frac{g(c-\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c-\delta_1)}{f(x)}} \geq 2M\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \geq M$$

$$i.e. \qquad \lim_{x\to c-}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

同様に, $\forall x \in (c, c+\delta)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+\delta_1)-f(x)}{g(c+\delta_1)-g(x)}\frac{1-\frac{g(c+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)}} = \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)}\frac{1-\frac{g(c+\delta_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(c+\delta_1)}{f(x)}} \geq 2M\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \geq M$$

$$i.e. \qquad \lim_{x\to c+}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

$L = -\infty$ の時も同様に示せる.

(3) (1),(2) より

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{-1}{t^2}f'(\frac{1}{t})}{\frac{-1}{t^2}g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(4) も同様に示すことができる. ∎

演習問題 11 (1) Cauchy の平均値の定理を用いて次の極限値を求めよ.

$$(i)\ \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x - \sec x) \qquad\qquad (ii)\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

(2) 次の極限値を求めよ.

$$(i)\ \ \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} \quad (\alpha > 0) \qquad\qquad (ii)\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x - x}{x^3}$$

3.3　Taylar の定理

$y = f(x)$ は開区間 I 上で微分可能であるとし，$f'(x)$ をその導関数とする．

定義 3.13

(1)　$f'(x)$ が $x = a \in I$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x = a \in I$ で **2 回微分可能**であるいう．$f'(x)$ の $x = a \in I$ における微分係数を $f''(a)$ と書き，$f(x)$ の $x = a \in I$ における **2 次微分係数**と呼ぶ．

(2)　$f(x)$ がすべての $x = a \in I$ で 2 回微分可能であるとき，I 上 **2 回微分可能**であるといい，$f'(x)$ の導関数を $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ 等で表し，$f(x)$ の **2 次導関数**と呼ぶ．

(3)　帰納的に一般の自然数 $n \geq 2$ についても n **回微分可能性**, n **次微分係数**, n **次導関数**を (1)(2) と同様にして定義する．このとき，$f(x)$ の $x = a \in I$ における n 次微分係数を $f^{(n)}(a)$, $\left.\dfrac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=a}$ で表し，$f(x)$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ 等で表す．また，$f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ とする．

(4)　$f(x)$ が I 上 n 回微分可能で, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が I 上連続であるとき，C^n**-関数**であるという．また，すべての自然数 n について C^n-関数であるとき，C^∞**-関数**であるという．

例題 3.14

(1)　$f(x) = x^\alpha$　($\alpha \in \mathbf{R}$ は定数) $\Longrightarrow f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(2)　$f(x) = e^{\alpha x}$　($\alpha \in \mathbf{R}$ は定数) $\Longrightarrow f^{(n)}(x) = (\alpha)^n e^{\alpha x}$

(3)　$f(x) = a^x$　($a > 0$ は定数) $\Longrightarrow f^{(n)}(x) = (\log a)^n a^x$

(4)　$f(x) = \log x$　$(x > 0) \Longrightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

(5)　$f(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \sin(x + \dfrac{n}{2}\pi)$

(6)　$f(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \cos(x + \dfrac{n}{2}\pi)$

定理 3.15(Leibniz の定理) 関数 $f(x), g(x)$ が開区間 I 上で n 回微分可能ならば，関数 $f(x)g(x)$ は I で n 回微分可能で

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j f^{(k-j)}(x)g^{(j)}(x), \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Proof　$k = 0$ のとき，左辺 $= f(x)g(x) =$ 右辺．$k = i(\leq n-1)$ のとき成立すると仮定すると $k = i+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(fg)^{(i+1)}(x) &= \frac{d}{dx}((fg)^{(i)})(x) = \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{i} {}_iC_j f^{(i-j)}(x)g^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{i} {}_iC_j \frac{d}{dx}(f^{(i-j)}(x)g^{(j)}(x)) \\
&= \sum_{j=0}^{i} {}_iC_j (f^{(i-j+1)}(x)g^{(j)}(x) + f^{(i-j)}(x)g^{(j+1)}) \\
&= \sum_{j=0}^{i} {}_iC_j f^{(i+1-j)}(x)g^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{i+1} {}_iC_{j-1} f^{(i+1-j)}(x)g^{(j)}(x) \\
&= {}_iC_0 f^{(i+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{i}({}_iC_j + {}_iC_{j-1})f^{(i+1-j)}(x)g^{(j)}(x) + {}_iC_i f^{(0)}(x)g^{(i+1)} \\
&= {}_{i+1}C_0 f^{(i+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{i} {}_{i+1}C_j f^{(i+1-j)}(x)g^{(j)}(x) + {}_{i+1}C_{i+1} f^{(0)}(x)g^{(i+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} {}_{i+1}C_j f^{(i+1-j)}(x)g^{(j)}(x)
\end{aligned}$$

よって，$k = i+1$ の時も成立するので数学的帰納法により証明された． ∎

例題 3.16 $k \geq 3,\ f(x) = x^3 e^x$ とすると

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j (x^3)^{(j)} (e^x)^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{3} {}_kC_j (x^3)^{(j)} e^x = ({}_kC_0 x^3 + {}_kC_1 3x^2 + {}_kC_2 6x + {}_kC_3 6) e^x \\ &= (x^3 + 3kx^2 + 3k(k-1)x + k(k-1)(k-2)) e^x \end{aligned}$$

定理 3.17(Taylor の定理) $n \geq 1$ とする．関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上 C^{n-1}-関数で，開区間 (a,b) 上 n 回微分可能ならば，次式が成立する．

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n. \tag{3.3}$$

ここで，ある $c, c' \in (a,b)$ に対して，

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n && (\textbf{Lagrange の剰余項}) \\ &= \frac{f^{(n)}(c')}{(n-1)!}(b-c')^{n-1}(b-a) && (\textbf{Cauchy の剰余項}). \end{aligned}$$

Proof 自然数 p に対して

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^p$$

とおくと，$g(b) = 0$ である．また，$g(a) = 0$ となるように定数 A を決める．つまり，

$$A = \frac{1}{(b-a)^p}\left(f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right).$$

このとき，$g(x)$ は $[a,b]$ 上連続，(a,b) 上微分可能であり，$g(a) = g(b) = 0$ であるから Rolle の定理 (定理 3.9) より，　$\exists c \in (a,b)\ \ s.t.\ \ g'(c) = 0.$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)(b-x)^k - f^{(k)}(x)k(b-x)^{k-1}}{k!} + pA(b-x)^{p-1} \\ &= -f'(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} + pA(b-x)^{p-1} \\ &= -\frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} + pA(b-x)^{p-1} \end{aligned}$$

であるから，$g'(c) = -\dfrac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} + pA(b-c)^{p-1} = 0 \qquad i.e.\quad A = \dfrac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-p}}{(n-1)!p}.$

また，$g(a) = 0$ より

$$g(a) = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - (b-a)^p \frac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-p}}{(n-1)!p}$$

$$i.e. \qquad f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!p}(b-c)^{n-p}(b-a)^p.$$

ここで，$p = n$ とおくと Lagrage の剰余項が，$p = 1$ とおくと Cauchy の剰余項が得られる． ∎

Taylor の定理において $a \leq 0 < b$ のとき，数式 (2.3) より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n, \qquad \forall x \in [0,b] \tag{3.4}$$

が成立する．これを **Maclaurin 展開**または，$x = 0$ の周りでの **Taylor 展開**という．

例題 3.18

(1)　$f(x) = e^x$ のとき，$f^{(n)}(x) = e^x$ であるから，*Maclaurin* 展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n, \qquad \text{ここで，} \theta x = c \quad (\theta \in (0,1))$$

(2)　$f(x) = \log(1+x) \quad (x \geq 0)$ のとき，$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ であるから，*Maclaurin* 展開は

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + R_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-x)^k}{k} + R_n$$

ここで，$R_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} \dfrac{x^n}{(1+c)^n} = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} \dfrac{x^n}{(1+\theta x)^n}, \qquad \exists c = \theta x \in (0,x) \quad (\theta \in (0,1))$

または $R_n = (-1)^{n-1} \dfrac{(x-c')^{n-1}}{(1+c')^n} x = (-1)^{n-1} \dfrac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n} x^n, \qquad \exists c' = \theta' x \in (0,x) \quad (\theta' \in (0,1)).$

(3)　$f(x) = \sin x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \sin(x + \dfrac{n}{2}\pi)$ であるから，*Maclaurin* 展開は

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k!} \sin \frac{k\pi}{2} x^k + R_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1} + R_{2n}$$

ここで，$\qquad R_{2n} = \dfrac{\sin(c+n\pi)}{2n!} x^{2n} = (-1)^n \dfrac{\sin \theta x}{2n!} x^{2n}, \qquad \exists c = \theta x \in (0,x), \ (\theta \in (0,1))$

演習問題 12　(1)　$f(x) = \cos x$ の *Maclaurin* 展開を求めよ．

(2)　$f(x) = \cosh x$ の *Maclaurin* 展開を求めよ．

(3)　$f(x) = e^{\cos x}$ の *Maclaurin* 展開を $n = 5$ 次まで求めよ．