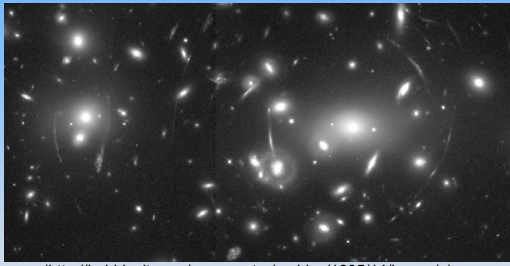


重力レンズ効果

慶応義塾大学 日吉物理学教室 談話会



(<http://hubblesite.org/newscenter/archive/1995/14/image/a>)

吉田 宏

yoshidah@fmu.ac.jp

福島県立医科大学 物理学講座

2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

1

目次

1. 序論 光が曲がる？
2. 重力レンズ効果って何だろう？
3. 主な観測例と応用
4. 最近の研究から

2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

2

1. 光が曲がる？

Newton (1701) 光は直進する!

Cavendish (1783), Laplace (1796), Soldner (1801)

光は重力で曲がりうる

Newtonの重力理論から

$$\Delta\phi_N = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} = 0.85'' \quad \text{当時の観測精度では測定不可}$$

(1''=1秒は1cmのものを2km離れてみたときの角度)

2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

3

相対論(Einstein)

Schwarzschild解

太陽の近くを通る光の道筋

光が重力によって曲げられる角度

$$\Delta\phi_R = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot} = 1.75''$$
$$= 2\Delta\phi_N$$

Eddington (1919)

日食のときに太陽の近くに見える星を観測

$$\Delta\phi_{\text{obs}} \approx 1.60'' \pm 0.31''$$

相対論の正しさを立証!!

2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

4

双子のクェーサー 発見!

Walsh, Carswell, Weymann(1979)

Q0956+561 A,B

Image Aのスペクトル

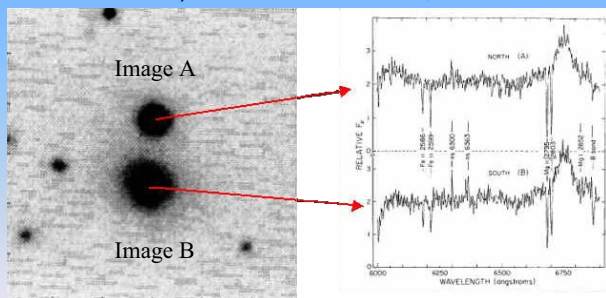


Image Bのスペクトル

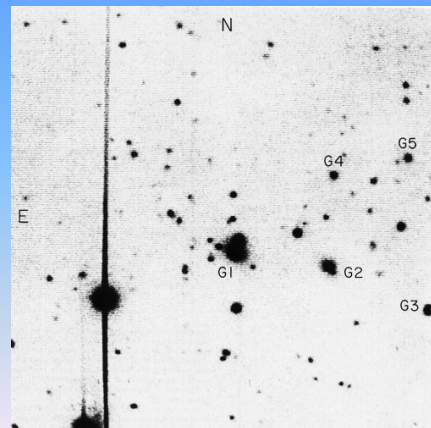
2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

5

Q0957+561

1/2



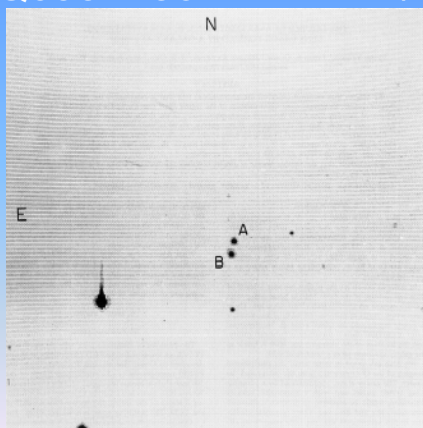
2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

6

Q0957+561

2/2



2003/10/15

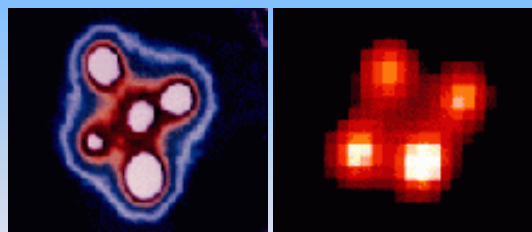
日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

7

Einstein cross (Clover leaf)

2237+0305

H1413+117

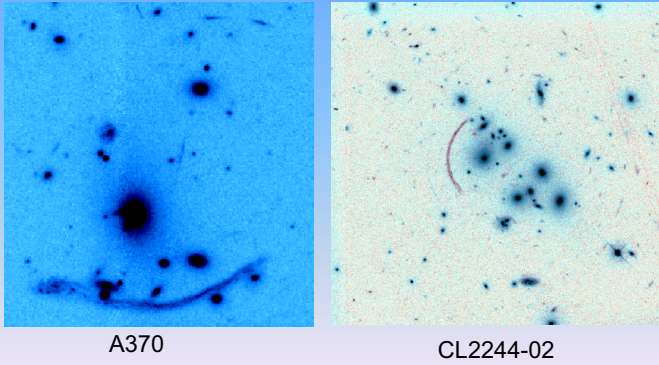


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

8

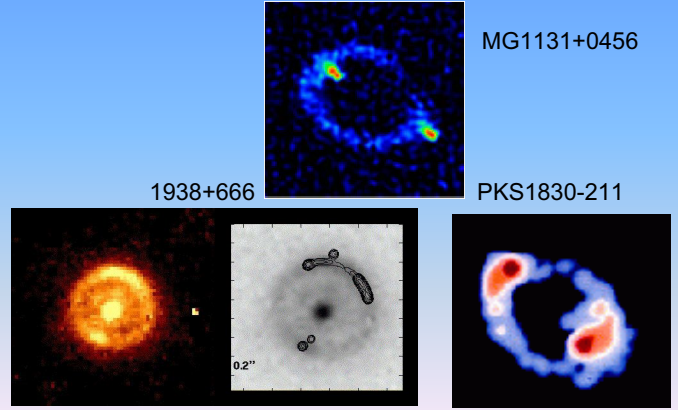
Giant arc



A370

CL2244-02

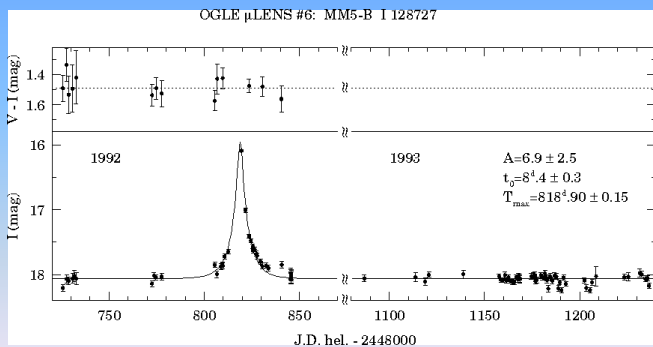
Einstein ring



1938+666

PKS1830-211

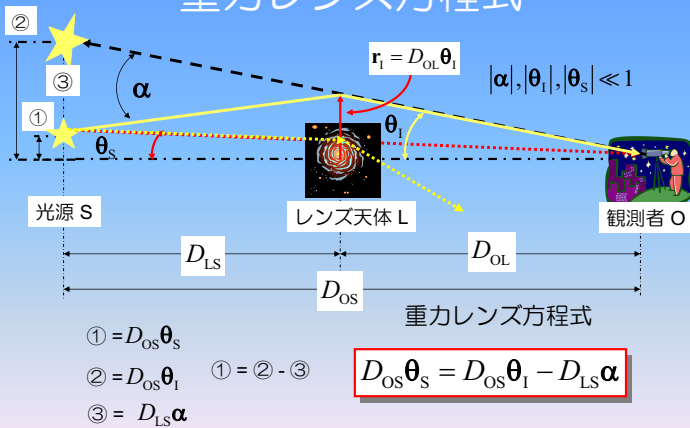
Microlensing



2. 重力レンズ効果って？

- 重力レンズ方程式
- 像の多重化
- 像の明るさ
- 像のゆがみ
- 到達時間の遅れ

重力レンズ方程式



簡単な例

レンズ天体が質点のとき レンズ天体がコンパクトなもの(星)

$$\text{曲がる角度 } \alpha = \frac{4GM}{c^2 r_1} = \frac{4GM}{c^2 D_{OL} \theta_l}$$

重力レンズ方程式

$$\theta_s = \theta_l - \frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}} \frac{1}{\theta_l} \quad \rightarrow \quad \theta_s = \theta_l - \frac{\theta_E^2}{\theta_l}$$

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}}} \quad \theta_l^2 - \theta_s \theta_l - \theta_E^2 = 0$$

アインシュタインリングの半径 $\theta_{l\pm} = \frac{1}{2} \left(\theta_s \pm \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2} \right)$

$\theta_{l\pm}$ の意味

像「+」

$$\theta_{l\pm} = \frac{1}{2} \left(\theta_s \pm \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

像「-」

像の多重化

1つの光源に対して複数の像が見られる

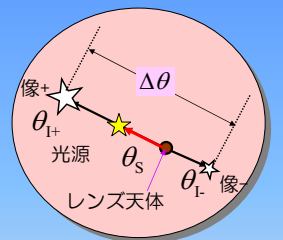
各像の性質はどれも同じ 赤方偏移, スペクトル

2つの像の分離角

$$\Delta\theta = \theta_+ - \theta_- = \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2}$$

$$\geq 2\theta_E = 2 \sqrt{\frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_{OL} D_{OS}}}$$

等号は $\theta_s = 0$ のとき



典型的な分離角の大きさ

$$\Delta\theta \sim 2\sqrt{\frac{4GMD_{LS}}{c^2 D_{OS} D_{OL}}}$$

光源が我々の銀河中心くらいにある場合
 レンズ天体が恒星程度の質量

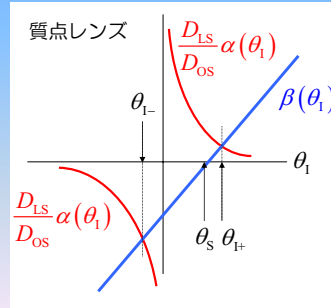
$$D_{OS} \sim 8\text{kpc} \approx 2.4 \times 10^{17}\text{km} \quad \Delta\theta \sim 0.002''$$

光源が我々から32億光年くらいにある場合
 レンズ天体が銀河程度(10^{45}g)の質量

$$D_{OS} \sim 32\text{億光年} \approx 3.1 \times 10^{22}\text{km} \quad \Delta\theta \sim 5.6''$$

グラフで見るレンズ方程式

$$\theta_s = \theta_l - \frac{\theta_E^2}{\theta_l} \Rightarrow \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha(\theta_l) = \frac{\theta_E^2}{\theta_l}, \quad \beta(\theta_l) = \theta_l - \theta_s, \quad \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha = \beta$$



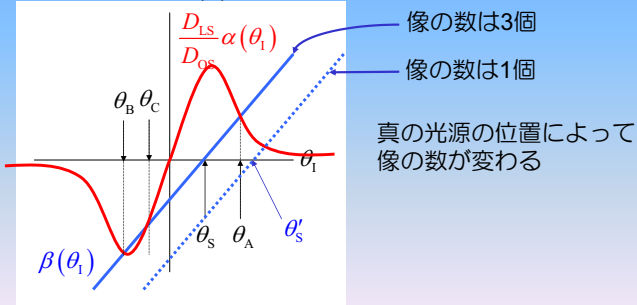
レンズ天体が質点の場合、像・真の光源・レンズ天体は一直線上に並ぶ

レンズ天体の質量分布が球対称なときの特徴

質点でない球対称なレンズ

$$\text{曲げられる角度} \quad \alpha = \frac{4GM(r)}{c^2 r}$$

$M(r)$ レンズ天体の半径 r 内に含まれる質量



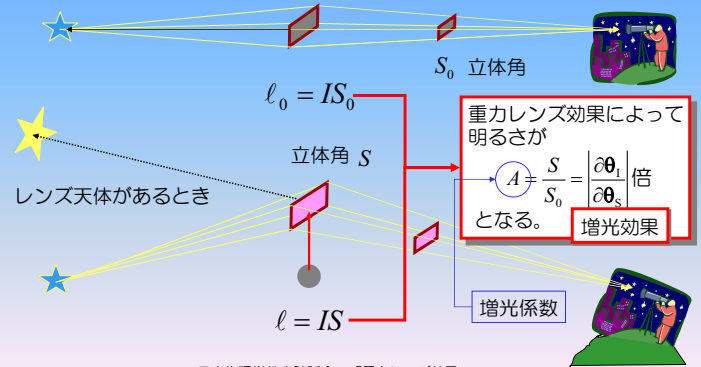
像の数は3個
 像の数は1個
 真の光源の位置によって像の数が変わる

像の明るさ

重力レンズ効果に左右されない

光源の見かけの明るさ=光源の表面輝度 (I) x 光源の立体角 (S)

レンズ天体のないとき



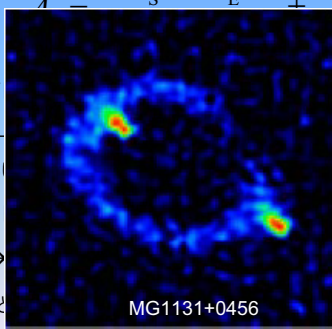
重力レンズ効果によって明るさが
 $A = \frac{S}{S_0} = \left| \frac{d\theta_l}{d\theta_s} \right|$ 倍となる。
 増光効果

増光係数

質点レンズによる増光効果

$$A_+ = \frac{\theta_s^2 + 2\theta_E^2}{\theta_s^2} + 1 \quad (A_+ \geq A_-)$$

・ 真の光源が $\theta_s \rightarrow \infty$ になると、 $A_+ \rightarrow 1$ となり、明るさは元の明るさになる。
 ・ 真の光源とレンズ天体が重なると ($\theta_s = 0$)、 $A_+ \rightarrow \infty$ となり、非常に明るくなる。
 ・ $\theta_s = 0$ のとき、 $A_+ = 1 + \frac{4}{\theta_E^2}$ となり、 θ_E の円周上に輝く



Einstein ring

像のゆがみ-----増光行列-----

$$\theta_s = \theta_l - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha(\theta_l)$$

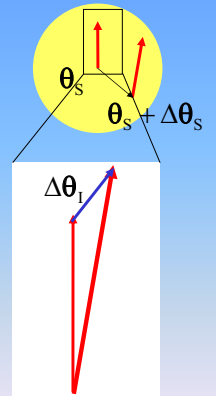
$$\theta_s + \Delta\theta_s = \theta_l + \Delta\theta_l - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha(\theta_l + \Delta\theta_l)$$

$$\Delta\theta_s = \Delta\theta_l - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{\partial \alpha(\theta_l)}{\partial \theta_l} \Delta\theta_l$$

$$\equiv [\mathbf{I} - \mathbf{U}(\theta_l)] \Delta\theta_l = \mathbf{M}^{-1}(\theta_l) \Delta\theta_l$$

$\mathbf{M}(\theta_l)$ 増光行列 (2行2列の行列)

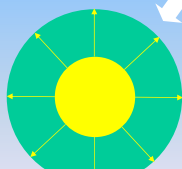
$$\mathbf{M}^{-1}(\theta_l) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$



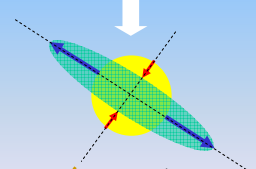
増光行列

$$\mathbf{M}^{-1}(\theta_l) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}$$



拡大縮小

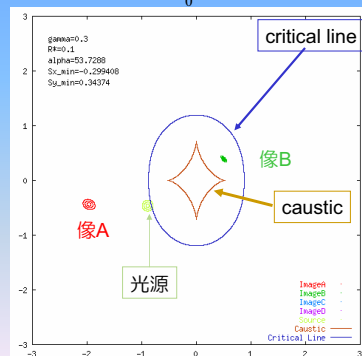


ゆがみ変形

レンズ天体

critical lineとcaustic

$$A(\theta) = \frac{S}{S_0} = \det[\mathbf{M}(\theta)] = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}$$



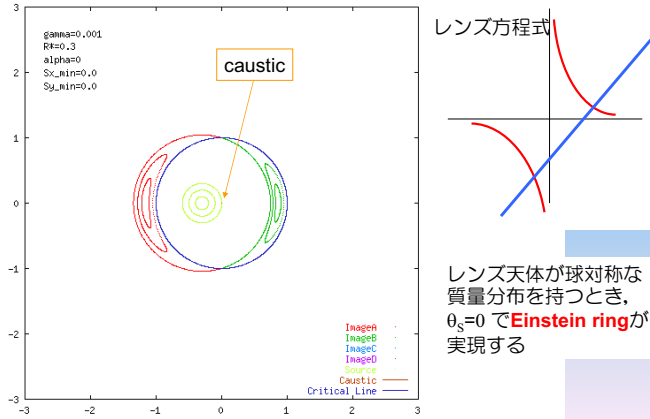
critical line

$1/A = 0$ となる θ の線
 像がこの線の上にあるときは像の明るさは非常に大きくなる

caustic

critical lineをレンズ方程式から θ_s に変換した線
 光源がこの線の上にあるときは像の明るさは非常に大きくなる

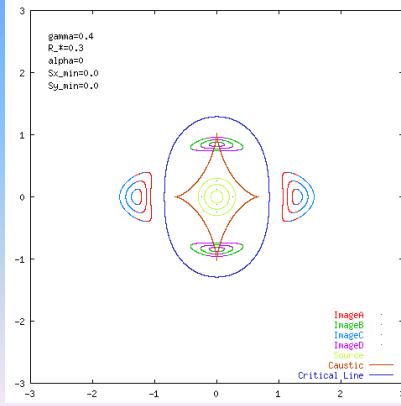
球対称な質量分布



レンズ方程式

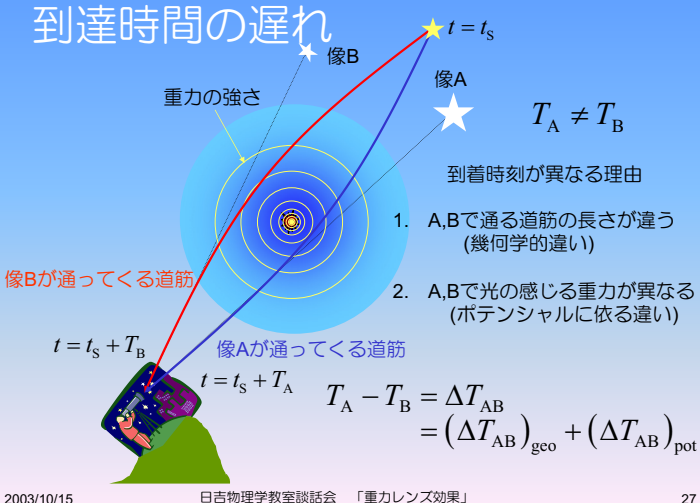
レンズ天体が球対称な質量分布を持つとき、 $\theta_s=0$ で **Einstein ring** が実現する

球対称でない質量分布



レンズ天体の質量分布が球対称でないとき、 θ_s と α は平行でなくなるため、光源、レンズ天体、観測者が一直線上に並んでも、アインシュタインリングはできない。そのかわり、**Einstein cross**ができる

到着時間の遅れ



到着時刻の遅れ(time delay)

$$(\Delta T_{AB})_{geo} = (1+z_L) \frac{D_{OL} D_{OS}}{c D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\theta_A - \theta_s|^2 - \frac{1}{2} |\theta_B - \theta_s|^2 \right]$$

$$(\Delta T_{AB})_{pot} = - \frac{(1+z_L) D_{OL} D_{OS}}{c D_{LS}} [\psi(\theta_A) - \psi(\theta_B)]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_x} \psi(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha_x(D_{OL}\theta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta_y} \psi(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha_y(D_{OL}\theta)$$

$$\Psi(\theta, \theta_s) = \frac{1}{2} |\theta - \theta_s|^2 - \psi(\theta, \theta_s)$$

$$(\Delta T_{AB})_{観測} = \frac{(1+z_L) D_{OL} D_{OS}}{c D_{LS}} [\Psi(\theta_A, \theta_s) - \Psi(\theta_B, \theta_s)]$$

宇宙論的な量に依存 レンズ天体のモデルに依存

3. 観測例と応用

- 多重クェーサーから
- 多重クェーサーの頻度
- マイクロレンズ効果

3.1. 多重クェーサー

同一の光源が複数の像として観測される

多重クェーサーである為の条件

1. 複数のクェーサーの分離角は小さいのか？
2. 複数の赤方偏移 z が同じか？
3. スペクトルは同じか？
4. レンズ天体はあるか？
5. 明るさは同じように変化しているか？

http://vela.astro.ulg.ac.be/themes/extragal/gravlens/bibdat/engl/glc_homepage.html

重力レンズ方程式からの制限

$$\theta_s = \theta_l - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha(D_{OL}\theta_l)$$

α 光の曲がる角度

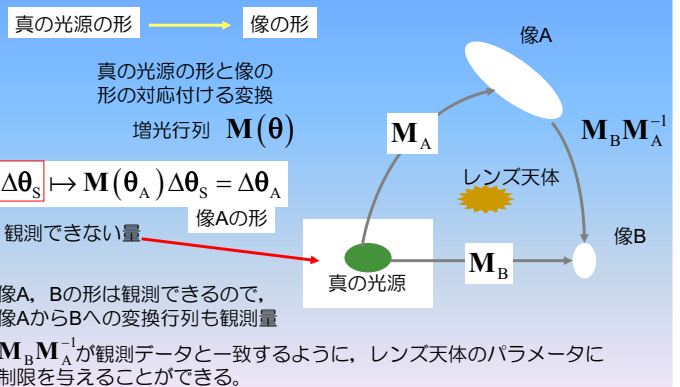
レンズ天体の特徴付けるパラメータ

全質量 M , 質量密度 ρ
形(球対称?, 楕円型?...)
速度分散, 回転速度

観測される像の位置 $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, \dots$

観測された複数の像の位置を再現するように、レンズ天体のパラメータに対して制限を与えることができる。

増光行列からの制限



Time delayの観測データから

$$\Delta T_{AB} = \frac{(1+z_L) D_{OL} D_{OS}}{c D_{LS}} [\Psi(\theta_A, \theta_S) - \Psi(\theta_B, \theta_S)]$$

観測量

宇宙論的な量に依存

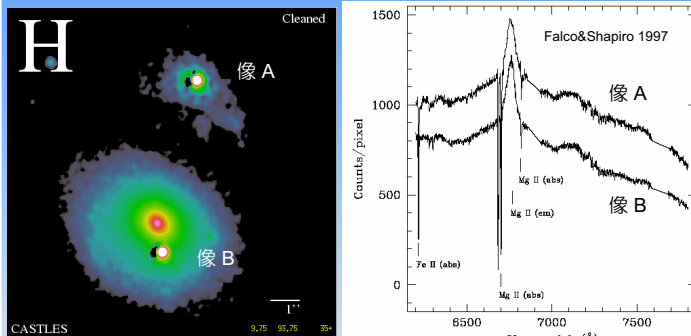
レンズ天体のモデルに依存

$$\frac{(1+z_L) D_{OL} D_{OS}}{c D_{LS}} = \frac{1}{H_0} f(z_L, z_S, \Omega_0, \lambda_0)$$

$$H_0 = \frac{1}{(\Delta T_{AB})_{obs}} f(z_L, z_S, \Omega_0, \lambda_0) [\Psi(\theta_A, \theta_S) - \Psi(\theta_B, \theta_S)]$$

像A,Bの位置, 明るさの比, 形, time delay, レンズの赤方偏移, 光源の赤方偏移 + Ω_0, λ_0 → Hubble定数 H_0

Q0957+561

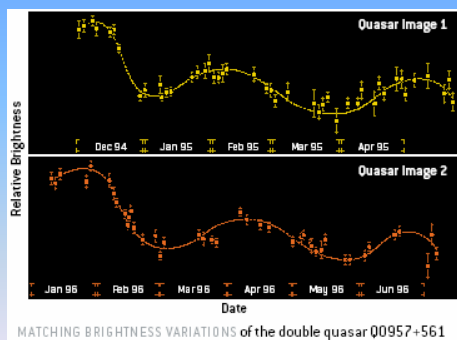


レンズ天体の赤方偏移 0.36
 像A,Bの分離角 6.5秒
 ケーサーの赤方偏移 1.41

Q0957+561の到着時間の遅れ

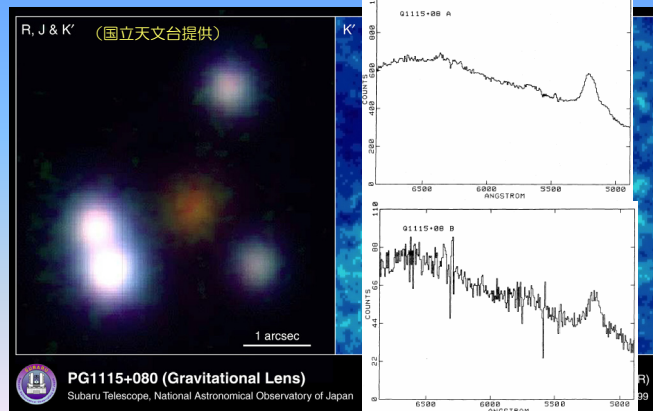
Q0957+561A,Bの明るさの変化 (光度曲線)

$$\Delta T_{AB} \approx 417 \text{日}$$



$$H_0 = 64 \pm 13 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

PG1115+080



2237+0305



2237+0305の拡大図

B1608+656

レンズ天体の赤方偏移 0.63

ケーサーの赤方偏移 1.39

イメージ間の分離角 0.9秒~2.1秒

到着時刻の遅れ

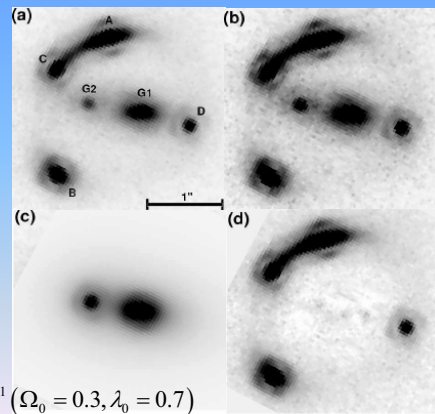
BA : 31±7日

BC : 36±7日

BD : 76±10日

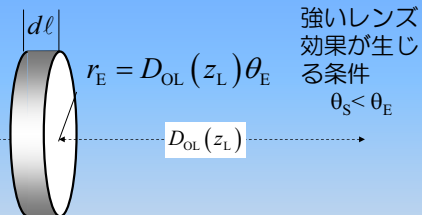
ハッブル定数

$$H_0 \sim 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} (\Omega_0 = 0.3, \lambda_0 = 0.7)$$



3.2. 多重ケーサーの頻度

レンズ天体の宇宙空間での数密度 n_L



強いレンズ効果が生じる条件 $\theta_S < \theta_E$

強いレンズ効果が起こる頻度

$$N = \int n_L \pi r_E^2 dl = \frac{3\Omega_L}{2} \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \int_0^{z_S} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} dV$$

宇宙定数が大きいと、この項も大きくなる

宇宙定数: λ_0 に対する制限 $\lambda_0 < 0.62$ (Falco, Kochanek, Munoz 1998)

3.3. Microlensing

macho = massive compact halo object

星による重力レンズ効果

$$\theta_E \sim 0.001'' \sqrt{\frac{M}{M_\odot} \frac{8[\text{kpc}] D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}}}$$

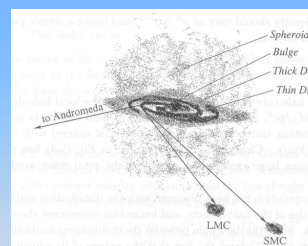
$$\Delta \theta \sim 0.002''$$

2つの像としては分離できない

$$A = A_+ + A_- = \frac{\theta_S^2 + 2\theta_E^2}{\theta_S \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2}}$$

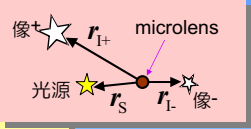
レンズ天体は光源に対して見かけ上運動しているので、 θ_S は時々刻々変化する

光源の明るさも時間変化する



増光効果

光源を点光源としたとき



$$A_p = \frac{\theta_s^2 + 2\theta_e^2}{\theta_s \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_e^2}} = \frac{u_0^2 + 2}{u_0 \sqrt{u_0^2 + 4}}$$

$$u_0 \equiv \theta_s / \theta_e = \sqrt{\xi_0^2 + \{V(t-t_0)/D_{OL}\theta_e\}^2}$$

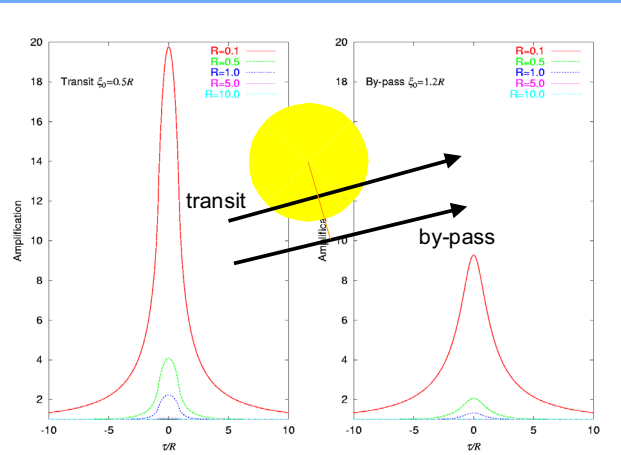
光源に大きさがあるとしたとき Witt & Mao, 1994

$$A = \frac{\iint \rho d\rho d\phi I(\rho, \phi) A_p(u(\rho, \phi))}{\iint \rho d\rho d\phi I(\rho, \phi)}, \text{ 明るさが時間変化する}$$

$$u(\rho, \phi) = \sqrt{u_0^2 + 2u_0\rho \cos\phi + \rho^2}$$

光度曲線

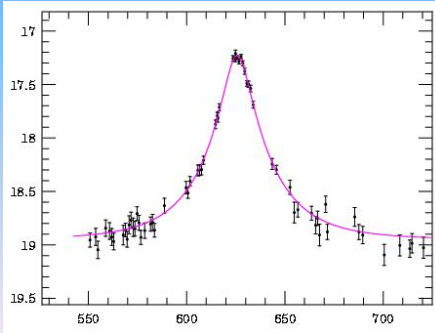
Microlens効果による光度曲線



Microlens の観測例 (光度曲線)

OGLE microlensing event candidate:
BUL_SC10 294229

Field	BUL_SC10
Star No	294229
RA (J2000.0)	18:20:20.60
Dec (J2000.0)	-22:24:10.1
Remarks	
t ₀ (HJD)	2450625.704 ± 0.166 (1997-06-26.20 UT)
τ _E (day)	33.09 ± 0.75
A _{max}	4.86 ± 0.07
I ₀	18.950 ± 0.010



http://sirius.astro.uw.edu.pl/~ftp/ogle/ogle2/gb_lenses/gallery1.html
日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

Microlens効果から得たい情報

- Microlensに関する情報
 - Microlensの質量 M
 - Microlensの位置 $\zeta = D_{OL}/D_{OS}$
 - Microlensの速度 V
- 光源に関する情報
 - 光源の大きさ $R_s, R = R_s \zeta / r_E$
 - 光源のtype
 - 光源の表面重力 g

観測できるもの:
 光度曲線 $2t_E = 2r_E / V$ (event duration), ξ_0 (R ?)
 Parallax効果 $r_E / (1 - \zeta)$ (reduced Einstein ring radius)
 位置測光 $\theta_E = r_E / D_{OL}$ (angular Einstein ring radius)

マイクロレンズの観測グループ

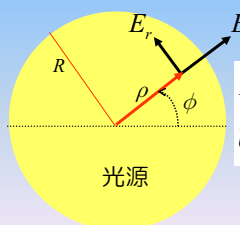
- MACHO (MASSive Compact Halo Object)
- EROS (Experience de Recherche d'Objets Sombres)
- OGLE (Optical Gravitational Lens Experiment)
- AGAPE (Andromeda Galaxy and Amplified Pixels Experiment)
- MOA (MACHO Observations in Astrophysics)
- PLANET (Probing Lensing Anomalies NETwork)
- DUO (Disk Unseen Objects)
- GMAN (Global Microlensing Alert Network)
- MIPS (Microlensing Planet Search)

4. 最近の研究から

- Microlens による偏光度の時間変化
- 多重重力レンズ効果

4.1. Microlensによる偏光度の時間変化

$$E_r = a_r \sin \omega t, \quad E_l = a_l \sin(\omega t + \delta)$$



Stokesのパラメーター
 $I_0 = \langle a_r^2 + a_l^2 \rangle, Q_0 = \langle a_l^2 - a_r^2 \rangle$
 $U_0 = \langle 2a_r a_l \cos \delta \rangle, V_0 = \langle 2a_r a_l \sin \delta \rangle$

光源の偏光 Chandrasekhar効果

• 光源の大気による散乱で偏光が生じる

$$Q(\rho, \phi) = Q_0(\rho) \cos 2(\phi + \alpha)$$

$$U(\rho, \phi) = -Q_0(\rho) \sin 2(\phi + \alpha)$$

$$Q_0(\rho) = I_0(0)c_2 \left[1 - \sqrt{1 - (\rho/R)^2} \right]$$

(Chandrasekhar 1960)

S_{Q0}



S_{U0}



光源が球対称のとき $\Rightarrow S_{Q0} = S_{U0} = 0$ 偏光は見られない (;_;)
 偏光が見られるのは、光源が二重星で蝕のときなどの対称性が壊れているとき!!
 ← Algolで観測されている (^_^)

マイクロレンズ効果による偏光

- Simmons,Newsam,Willis (1995) (SNW)
- Simmons,Willis,Newsam (1995)
- Agol (1996) [binary lens]

マイクロレンズによる増光効果で光源の対称性が壊れる + マイクロレンズは光源に対して V で動いている

マイクロレンズの運動に伴って、対称性の壊れ方が時々刻々変化する

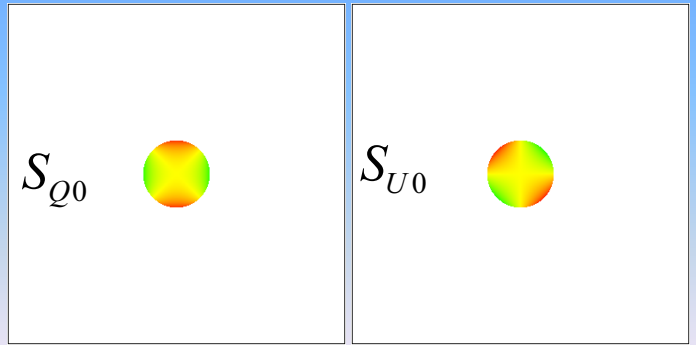
偏光度の時間変化が見られる

2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

49

MicroLens効果を受けていないとき

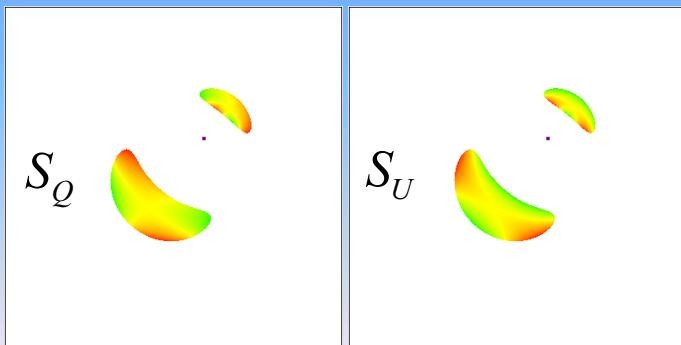


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

50

MicroLens効果を受けているとき(1/7)

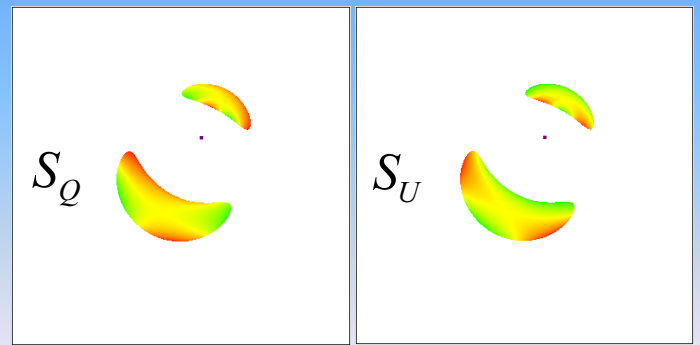


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

51

MicroLens効果を受けているとき(2/7)

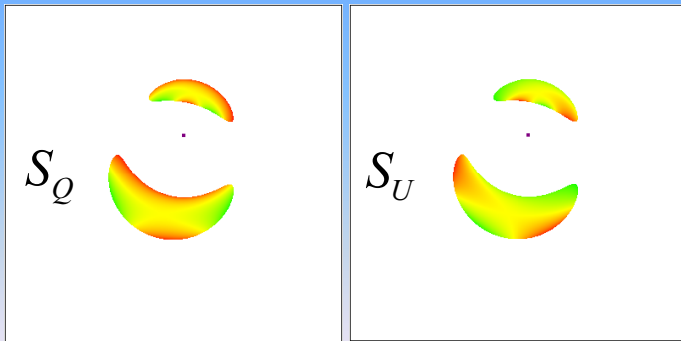


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

52

MicroLens効果を受けているとき(3/7)

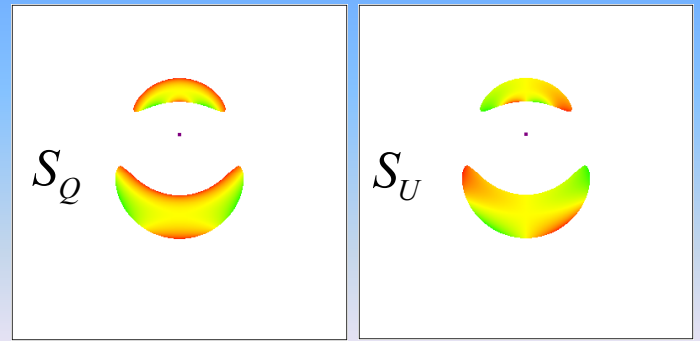


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

53

MicroLens効果を受けているとき(4/7)

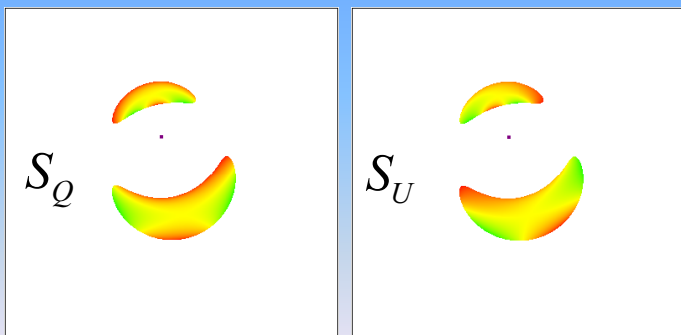


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

54

MicroLens効果を受けているとき(5/7)

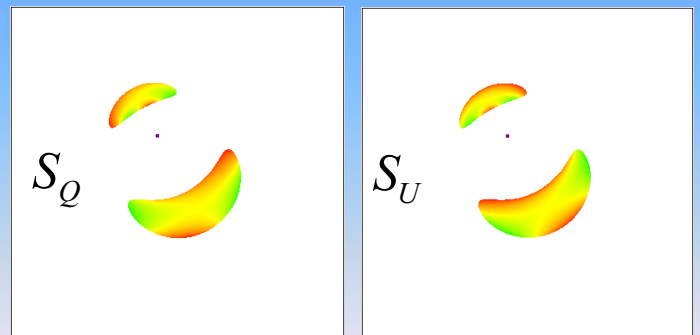


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

55

MicroLens効果を受けているとき(6/7)

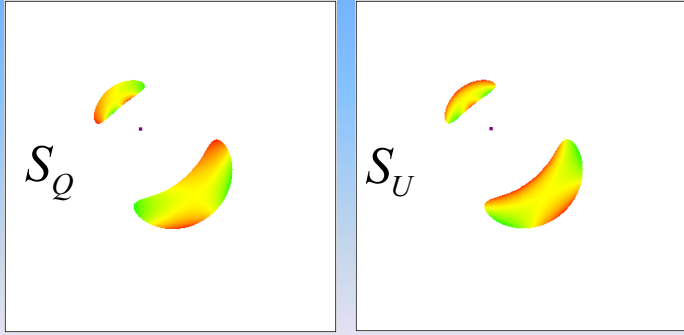


2003/10/15

日吉物理学教室談話会 「重力レンズ効果」

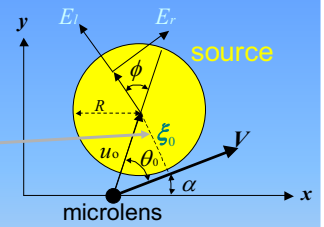
56

Microlens効果を受けているとき(7/7)



偏光度の時間変化

マイクロレンズと光源の位置関係



ξ_0 : MicrolensのImpact parameter

$$u_0^2 = \xi_0^2 + \{V(t-t_0)/r_E\}^2 = \xi_0^2 + \tau^2$$

$$\begin{pmatrix} S_I \\ S_Q \\ S_U \end{pmatrix} = \iint \rho d\rho d\phi A_p(\rho, \phi) \begin{pmatrix} I_0(\rho) \\ Q_0(\rho) \cos 2(\phi + \alpha + \theta_0) \\ -Q_0(\rho) \sin 2(\phi + \alpha + \theta_0) \end{pmatrix}$$

増光係数

$$A_p(\rho, \phi) = \frac{u_0^2 + 2\rho u_0 \cos \phi + \rho^2 + 2}{\sqrt{u_0^2 + 2\rho u_0 \cos \phi + \rho^2} \sqrt{u_0^2 + 2\rho u_0 \cos \phi + \rho^2 + 4}}$$

偏光度

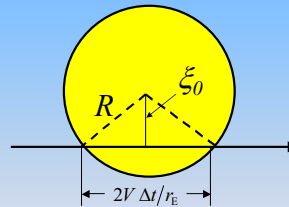
$$p = \frac{\sqrt{S_Q^2 + S_U^2}}{S_I} = \frac{D(R, u_0)}{S_I(R, u_0)}$$

$$u_0^2 = \xi_0^2 + \{V(t-t_0)/r_E\}^2 = \xi_0^2 + \tau^2$$

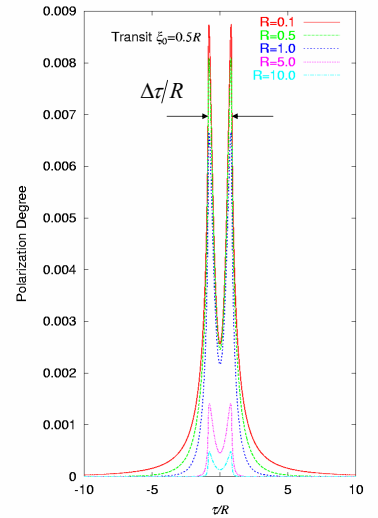
SNWでは偏光度 p を様々な R, u_0 に対して数値的に求めている。

Transitのとき

偏光度には2つのピークがある(SNW)

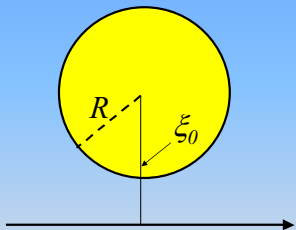


$$R = \sqrt{(V\Delta t/r_E)^2 - \xi_0^2}$$

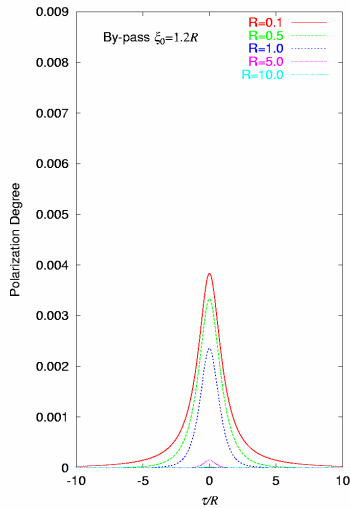


By-passのとき

ピークは1つ(SNW)



By-passの場合では R は測れないのだろうか?



Semi-Analytical Formulae

Total Intensity; Witt, H.J., 1995 (光度曲線)

$$S_I = 4I_0 r_E^2 \int_0^R d\rho \rho \left[1 - c_1 \left\{ 1 - \sqrt{1 - (\rho/R)^2} \right\} \right] \times \left[\frac{(u_0 - \rho)^2 \Pi(k, n) + 2F(k)}{(u_0 + \rho) \sqrt{(u_0 - \rho)^2 + 4}} \right]$$

$F(k)$: 第1種楕円積分 $n = \frac{4u_0\rho}{(u_0 + \rho)^2}, k^2 = \frac{4n}{(u_0 - \rho)^2 + 4}$
 $\Pi(k, n)$: 第3種楕円積分

The Stokes Parameters S_Q, S_U

$$\begin{pmatrix} S_Q \\ S_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\theta_0 + \alpha) \\ -\sin 2(\theta_0 + \alpha) \end{pmatrix} D(R, u_0)$$

$$D(R, u_0) = I_0 c_2 r_E^2 \int_0^R d\rho \left\{ 1 - \sqrt{1 - (\rho/R)^2} \right\} \left[\frac{(u_0 - \rho)^2 \Pi(k, n)}{u_0^2 \rho (u_0 + \rho) \sqrt{(u_0 - \rho)^2 + 4}} + \frac{u_0^6 + \rho^6 - u_0^2 \rho^2 (u_0^2 + \rho^2) + 6(u_0^4 + \rho^4) + 4u_0^2 \rho^2}{8u_0^2 \rho (u_0 + \rho) \sqrt{(u_0 - \rho)^2 + 4}} F(k) - \frac{(u_0 + \rho)(u_0^2 + \rho^2 + 2) \sqrt{(u_0 - \rho)^2 + 4}}{8u_0^2 \rho} E(k) \right]$$

$E(k)$: 第2種楕円積分 (by Yoshida)

By-passのときの偏光度と光源のサイズの関係

S_I, D を $R < u_0, R < 1$ として展開すると...

$$S_I = A_p S_{I0} \left[1 + \frac{60 - 28c_1}{15 - 5c_1} \frac{u_0^2 + 1}{(u_0^2 + 2)(u_0^2 + 4)^2} \left(\frac{R}{u_0}\right)^2 + \dots \right]$$

$$D = \frac{21c_2}{15 - 5c_1} \frac{A_p S_{I0}}{(u_0^2 + 4)^2} \left(\frac{R}{u_0}\right)^2 \left[1 + \frac{304(u_0^6 + 3u_0^4 + 6u_0^2 + 5)}{147(u_0^2 + 2)(u_0^2 + 4)^2} \left(\frac{R}{u_0}\right)^2 + \dots \right]$$

$$p \approx \frac{21c_2}{15 - 5c_1} \frac{(R/u_0)^2}{(u_0^2 + 4)^2}$$

偏光度の最大値

偏光度が最大となるのは $u_0 = \xi_0$ のとき

$$p_{\max} \approx \frac{21c_2}{15-5c_1} \frac{(R/\xi_0)^2}{(\xi_0^2 + 4)^2} \approx 0.0011 \left[\frac{R/(0.5\xi_0)}{(0.5\xi_0)^2 + 1} \right]^2$$

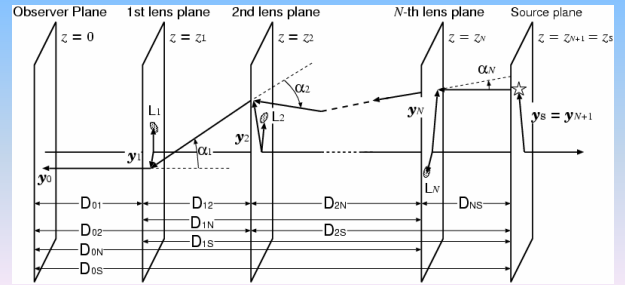
ただし, $c_1 = 0.64$, $c_2 = 0.04$

→ $\xi_0 = \xi_0(p_{\max}, R)$ または $R = R(p_{\max}, \xi_0)$

さらに, 光度曲線(S_l)の測定から ξ_0 が得られれば R がきまる

4.2. 多重重力レンズ効果

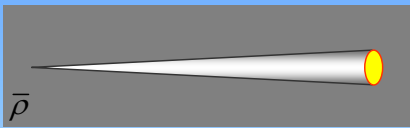
- 天体までの距離(角度距離)
- 多重重力レンズ方程式
- Jacobian Matrix (増光行列)



角度距離

一様等方宇宙(Friedmann-Lemaitre model)

$$D_{FL}(0; z)$$

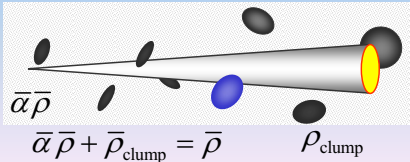


$$D_{FL}(0; z) \leq D(0; z)$$

非一様宇宙 (clumpy model)

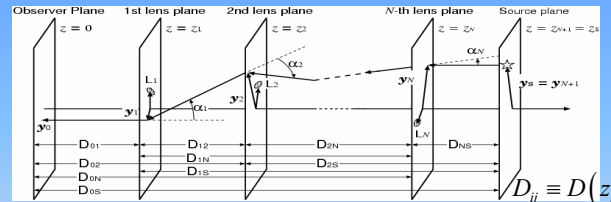
$$D(0; z)$$

Dyer-Roeder distance
clumpの影響を無視



$$\bar{\alpha} \bar{\rho} + \bar{\rho}_{\text{clump}} = \bar{\rho} \quad \rho_{\text{clump}}$$

多重重力レンズ方程式



$$y_s = \frac{D_{OS}}{D_{O1}} y_1 - D_{1S} \alpha_1(y_1) - D_{2S} \alpha_2(y_2) \dots - D_{NS} \alpha_N(y_N)$$

$$= \frac{D_{OS}}{D_{O1}} y_1 - \sum_{k=1}^N D_{kS} \alpha_k(y_k) \quad \left[y_i = \frac{D_{0i}}{D_{O1}} y_1 - \sum_{k=1}^i D_{ki} \alpha_k(y_k) \right]$$

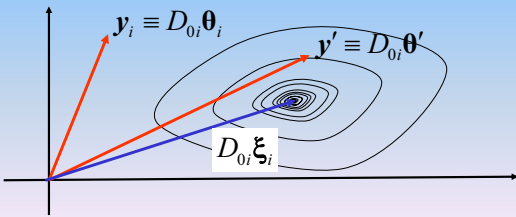
$$y_i \equiv D_{0i} \theta_i$$

Dyer-Roeder distance

i 番目のレンズによる曲がり角

$$\alpha_i(y_i) = \frac{4G}{c^2} \iint_{S_i} d^2 y' \sigma_i(y') \frac{y_i - y'}{|y_i - y'|^2}$$

表面質量分布



Jacobian Matrix: $A_S \theta_1 \mapsto \theta_S$

$$M_{S,N}^{-1} \equiv A_{S,N} = \frac{\partial \theta_S}{\partial \theta_1} = I - \sum_{k=1}^N U_k(\theta_k) A_k$$

$$A_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_1} = I - \sum_{k=1}^i U_k A_k \quad U_k = U_k(\theta_k) = \frac{D_{ki}}{D_{0i}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \theta_k}$$

$$A_{S,N} = \frac{\partial \theta_S}{\partial \theta_1} = I - \sum_{k_1=1}^N U_{k_1} \left(I - \sum_{k_2=1}^{k_1} U_{k_2} \left(I - \sum_{k_3=1}^{k_2} U_{k_3} \dots \right) \right)$$

$$= I + \sum_{i=1}^N (-)^i \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^{k_1} \sum_{k_3=1}^{k_2} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}} U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} \dots U_{k_i}$$

Jacobian Matrixの平均をとる

いろいろな方向に見える光源について平均をとる

$$\langle A_{S,N} \rangle = I + \sum_{i=1}^N (-)^i \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^{k_1} \sum_{k_3=1}^{k_2} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}} \langle U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} \dots U_{k_i} \rangle$$



各レンズ面上でのレンズの位置について平均をとる

平均のJacobian Matrix

$$\langle U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} \dots U_{k_i} \rangle = a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \dots a_{k_i} I$$

$$\langle A_{S,N} \rangle = \left[1 + \sum_{i=1}^N (-)^i \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^{k_1} \sum_{k_3=1}^{k_2} \dots \sum_{k_{i-1}=1}^{k_{i-2}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \dots a_{k_i} \right] I$$

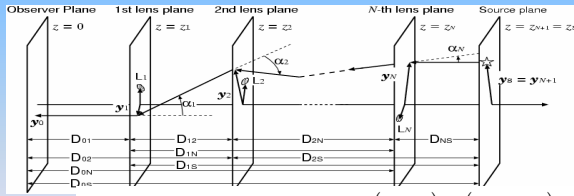
$$= B_N(z_S) I$$

多重重力レンズ効果の写像は平均的には等方的な写像となる

$\langle A_{S,N} \rangle$ の連続極限

レンズの数 $N \rightarrow \infty$ の極限

レンズの質量 $\langle M \rangle \simeq \frac{1}{N} \int \rho dV \sim \rho \frac{dV}{dz} \Delta z, \left(\Delta z \sim \frac{z_S}{N} \rightarrow 0 \right)$



$$a_{k_j} \rightarrow \frac{4\pi G}{c} [1 - \bar{\alpha}] \bar{\rho}(z_{k_j}) \frac{D(0; z_{k_j}) D(z_{k_j}; z_{k_{j-1}})}{D(0; z_{k_{j-1}}) (1 + z_{k_j}) H(z_{k_j})} \Delta z$$

連続極限での平均の増光行列

$$A_S = \lim \langle A_{S,N} \rangle = B(z_S) \mathbf{I}$$

$$\tilde{D}(0; z_S) \equiv B(z_S) D(0; z_S)$$

Friedmann-Lemaitre での角度距離と一致

$$D_{FL}(0; z_S) = B(z_S) D(0; z_S)$$