

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題冊子は本文 1 ページ、解答用紙は 5 枚です。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお、解答に至るまでの導出過程も記述すること。
- 5 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 6 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

〔1〕 以下の各問いに答えよ。

- (1) 企業 J_1 は生産者から農産物 R を仕入れ、その仕入金額の 1.2 倍の金額で企業 J_2 に販売している。さらに企業 J_2 は仕入金額の 1.2 倍の金額で企業 J_3 に販売している。以下同様に売買が繰り返され、最終的に企業 J_n は仕入金額の 1.2 倍の価格で消費者に販売している。消費者の購入金額が J_1 の仕入金額の 3 倍以上になる最小の自然数 n を求めよ。ただし、企業 J_1 の仕入金額は正の値であり、 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ とする。
- (2) e は自然対数の底とする。放物線 $C_1: y = ax^2 + a$ と曲線 $C_2: y = \log_e(1 + x^2)$ は接している。定数 a の値を求めよ。また、 C_1 と C_2 で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。
- (3) $2\pi \leq x \leq 3\pi$ であるとき、 $\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{7}$ であることを示せ。
- (4) 平面上の点 F, G, H が一直線上にないとき、 $\triangle FGH$ の面積を S_{FGH} と表す。 F, G, H が一直線上にあるときは $S_{FGH} = 0$ とする。 $S_{ABC} = 1$ である $\triangle ABC$ の辺 AB, AC の中点をそれぞれ D, E とする。点 P が $\triangle ABC$ の辺および内部を動くとき、 $S = S_{ADP} + S_{AEP} + S_{DEP}$ の最大値と最小値を求めよ。

〔2〕 一辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ において、辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を D 、辺 OC を $t:(1-t)$ に内分する点を E とし、線分 DE の中点を M とする。ただし、 $0 < t < 1$ である。また、 $\triangle ADE$ を含む平面に点 O から垂線を下ろし、その垂線と平面の交点を H とする。 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAM$ の面積を t で表せ。
- (2) \vec{AM} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および t で表せ。
- (3) 点 H は直線 AM 上にあることを示し、 \vec{AH} を t と \vec{AM} で表せ。また、 H と M が一致するときの t の値を求めよ。
- (4) $\triangle OAH$ の面積を t で表せ。
- (5) $\triangle OAH$ の面積が最大になるときの t の値を求めよ。また、そのときの四面体 $ODEH$ の体積を求めよ。

〔3〕 n 次式 x^n を、 2 次式 $x^2 - 7x - 2$ で割ったときの余りを、実数 a_n, b_n を用いて $a_n x + b_n$ と表す。ただし、 n は 2 以上の自然数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。また、 n が偶数であるとき、 a_n は 7 の倍数であることを示せ。
- (4) a_n を 7 で割ったとき、余りとなりうる数をすべて求めよ。

〔4〕 $x \geq 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} e^{-x} \sin x$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $y = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示せ。また、逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域を求めよ。
- (3) n は自然数とする。 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について、定積分 $\int_{\frac{1}{1+2n\pi}}^1 f^{-1}(x) dx$ を計算せよ。