福島県立医科大学
令和８年度医学部一般選抜（前期日程）

【解答例】

教科：数学

　解答例の公表に当たり、一義的な解答が示せない記述式の問題等については、「出題の意図又は複数の若しくは標準的な解答例等」を公表することとしています。

　また、記述式の問題以外の問題についても、標準的な解答例として正答の一つを示している場合があります。

令 和 8 年 度

医学部前期入学試験

数 学 解 答 用 紙

受験番号

(5 枚のうちの 1)

〔1〕(1)

J_1 の仕入金額を x とすると, 消費者の購入金額は $1.2^n x$ だから, $1.2^n x \geqq 3x$ を満たす最小の自然数 n を見つければよい.

$$1.2^n \geqq 3 \quad \Leftrightarrow \quad n\log_{10}\frac{12}{10} \geqq \log_{10}3$$
$$\Leftrightarrow \quad n \geqq \frac{\log_{10}3}{\log_{10}2^2\cdot 3 - 1} = \frac{0.477}{2\cdot 0.301 + 0.477 - 1}$$
$$= \frac{477}{79} = 6.03\cdots$$

したがって, 条件を満たす最小の自然数は $n=7$

〔1〕(2)

接点を $(t,\, at^2+a)$ とおくと

$$a(1+t^2) = \log_e(1+t^2) \qquad \cdots\cdots ①$$

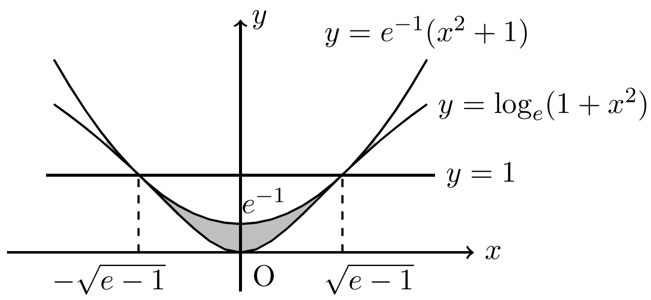
が成り立つ. また, 2 つの曲線の接点における接線は一致するから, 接線の傾きを考えて,

$$2at = \frac{2t}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad 2t\left(a - \frac{1}{1+t^2}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ. $t=0$ とすると, ①より $a=0$ となり, C_1 が放物線にならないから $t \neq 0$ である. したがって, ②より, $1+t^2 = \dfrac{1}{a}$ である. これを①に代入することにより,

$$a = \frac{1}{e}$$

であり, 接点は $(\pm\sqrt{e-1},\, 1)$ である.



曲線 $C_2 : x^2 = e^y - 1$ と直線 $y=1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_2, 放物線 $C_1 : x^2 = ey - 1$ と直線 $y=1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_1 とすると, 求める回転体の体積 V は,

$$V = V_2 - V_1 = \pi\int_0^1 (e^y - 1)dy - \pi\int_{e^{-1}}^1 (ey-1)dy$$
$$= \pi(e-2) - \pi\frac{(e-1)^2}{2e}$$
$$= \pi\frac{(e-1)^2 - 2}{2e}$$

計

点

令　和　8　年　度
医学部前期入学試験

数 学 解 答 用 紙

受験番号

〔1〕(3)

$\sin x$ は周期 2π の周期関数だから, 平行移動を考えると,

$$0 \leqq x \leqq \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x+2\pi} < \frac{1}{7}, \qquad \cdots\cdots ③$$

つまり, $0 \leqq x \leqq \pi$ において, $7\sin x - x < 2\pi$ であることを示せばよい. $f(x) = 7\sin x - x$, $0 \leqq x \leqq \pi$ とおくと,

$$f'(x) = 7\cos x - 1, \qquad f''(x) = -7\sin x \qquad \text{であり},$$

$0 < x < \pi$ において, $f''(x) < 0$ だから, $\cos x_0 = \dfrac{1}{7}$ を満たす x_0 $(0 < x_0 < \pi)$ において $f(x)$ は最大になる.

$$\cos x_0 = \frac{1}{7} < \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} < x_0 < \frac{\pi}{2}$$

だから,

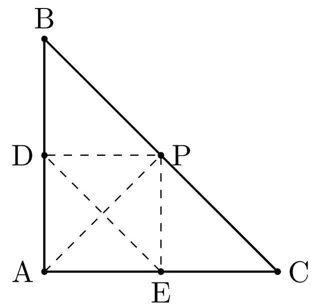
$$f(x_0) = 7\sqrt{1-\cos^2 x_0} - x_0 = 4\sqrt{3} - x_0 < 4\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$
$$< 4 \cdot 1.74 - \frac{\pi}{3}$$

がわかる.

$$2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7}{3}\pi > \frac{7}{3} \cdot 3.12 = 7.28 > 6.96 = 4 \cdot 1.74$$

だから, 最大値 $f(x_0)$ が $f(x_0) < 2\pi$ を満たすこと, つまり, ③が示された.

〔1〕(4)



D, E はそれぞれ, 辺 AB, AC の中点だから,

$$S_{\mathrm{ADE}} = \frac{1}{4}S_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{4}$$

である. P が △ADE の辺または内部にあるとき, △ADE は 3 つの三角形 △ADP, △AEP, △DEP に分割されるから,

$$S = S_{\mathrm{ADE}} = \frac{1}{4}$$

P が △ABC から △ADE を除いた部分にあるとき,

$$S = S_{\mathrm{ADE}} + 2S_{\mathrm{DEP}}$$

であり, DE//BC だから, S_{DEP} は P が辺 BC 上にあるときに最大になる. このとき, $S_{\mathrm{DEP}} = S_{\mathrm{ADE}}$ だから,

$$S = 3S_{\mathrm{ADE}} = \frac{3}{4}$$

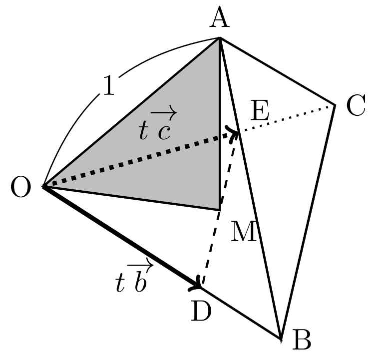
よって, S の最小値は $\dfrac{1}{4}$ であり, 最大値は $\dfrac{3}{4}$ である.

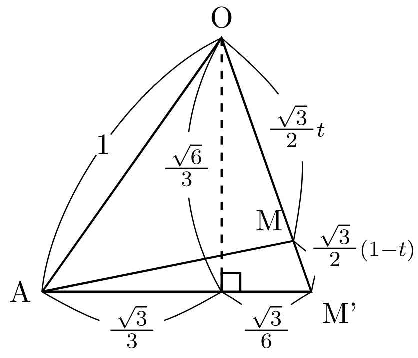
計	点

数 学 解 答 用 紙

受験番号	

〔2〕





(1) B, C の中点を M' とすると，右上図より，△OAM' の面積は $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ であり，線分の長さの比 OM : OM'$=t:1$ だから，△OAM の面積は $\dfrac{\sqrt{2}}{4}t$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{t}{2}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})-\overrightarrow{a}$.

(3) △ODE は OD $=$ OE の二等辺三角形，△ADE は AD $=$ AE の二等辺三角形であり，M は線分 DE の中点だから，△AOM を含む平面と △ADE を含む平面は直交する．したがって，△ADE を含む平面に点 O から下ろした垂線とその平面との交点 H は直線 AM 上にある．
したがって，ある r について $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表せる．
$\overrightarrow{a}\bullet\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\bullet\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\bullet\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{2}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\frac{t}{2}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\bullet\overrightarrow{a}-|\overrightarrow{a}|^2=\frac{t}{2}-1\\ |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2&=\frac{t^2}{4}|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|^2-t(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\bullet\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{a}|^2\\ &=\frac{3}{4}t^2-t+1\end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ だから，

$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})\bullet\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ &=r|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AM}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}}=r\frac{3t^2+4(1-t)}{4}-\frac{2-t}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ r=\frac{2(2-t)}{3t^2+4(1-t)}\qquad\Rightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2(2-t)}{3t^2+4(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

また，2 点 H, M が一致するのは

$$1-r=\frac{t(3t-2)}{3t^2+4(1-t)}=0\quad\text{つまり，}\quad t=\frac{2}{3}\quad\text{のとき．}$$

(4) $\dfrac{2}{3}\leqq t<1$ であるとき，$0\leqq 1-r<1$ より，点 H は線分 AM を $r:(1-r)$ に内分する点である．また，$0<t<\dfrac{2}{3}$ であるとき，$1-r<0$ より，点 H は線分 AM を $r:(r-1)$ に外分する点である．どちらの場合でも △OAH の面積は △OAM の面積の r 倍だから，(1) より，△OAH の面積は

$$\frac{\sqrt{2}}{4}t\cdot r=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t(2-t)}{3t^2+4(1-t)}$$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{t(2-t)}{3t^2+4(1-t)}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{t+2}{3t^2+4(1-t)}-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ より，
$f(t)=\dfrac{t+2}{3t^2+4(1-t)}$ を考えると，

$$f'(t)=\frac{-3(t^2+4t-4)}{\left(3t^2+4(1-t)\right)^2}$$

t	0	$\cdots$	$2(\sqrt{2}-1)$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	最大	↘	

であるから，△OAH の面積が最大になるのは，$t=2(\sqrt{2}-1)$ のときである．このとき，$2(\sqrt{2}-1)>\dfrac{2}{3}$ だから，H は線分 AM の内分点であり，△OMH の面積は

$$\frac{\sqrt{2}}{4}t\cdot(1-r)=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{t^2(3t-2)}{3t^2+4(1-t)}$$

四面体 OHME において，$\overrightarrow{\mathrm{EM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ だから，△OMH を底面とすれば，高さは $|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|=\dfrac{t}{2}$ になり，四面体 OHME の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{t^2(3t-2)}{3t^2+4(1-t)}$$

と表せる．$t^2=4-4t$, $t=2(\sqrt{2}-1)$ を代入すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{24}\cdot\frac{6-7t}{2}=\frac{5\sqrt{2}-7}{12}$$

四面体 ODEH の体積は四面体 OHME の体積の 2 倍だから，

$$\frac{5\sqrt{2}-7}{6}$$

計	点

数 学 解 答 用 紙

受験番号

〔3〕

(1) $x^2 = 1\cdot(x^2-7x-2)+7x+2$ より, $a_2=7,\ b_2=2$.

(2) x^n を $F=x^2-7x-2$ で割ったときの商を Q_n とすると, $x^n = Q_n\cdot F + a_nx+b_n$ であり, この両辺に x を掛けると,

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= xQ_n\cdot F + a_nx^2+b_nx \\ &= xQ_n\cdot F + a_n(x^2-7x-2)+(7a_n+b_n)x+2a_n \\ &= (xQ_n+a_n)F+(7a_n+b_n)x+2a_n \end{aligned}$$

だから, $\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n+b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$

(3) ①, ②より, $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} = 7a_{n+1}+2a_n \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たすことが分かる. $a_2=7$ と, $a_3=7a_2+b_2=51$ は自然数だから, ③に逐次的に代入することにより, すべての自然数 n ($n \geqq 2$) について, a_n が自然数であることが云える.

ある自然数 k について, a_{2k} が 7 の倍数であるとすると, $a_{2(k+1)} = 7a_{2k+1}+2a_{2k}$ より, $a_{2(k+1)}$ も 7 の倍数である. $a_2=7$ だから, 数学的帰納法より, すべての自然数 k について a_{2k} は 7 の倍数である.

(4) 2 つの自然数 p, q について, p を 7 で割ったときの余りと, q を 7 で割ったときの余りが等しいとき, $p\equiv q$ と表記すると, (3) より, $a_{2k}\equiv 0$ である. さらに, ③より,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 7a_{2k}+2a_{2k-1} \\ &\equiv 2a_{2k-1} \equiv 2^2a_{2k-3} \equiv \cdots \equiv 2^j a_{2(k-j)+1} \\ &\equiv \cdots\cdots \equiv 2^{k-1}a_3 = 2^{k-1}(7^2+2) \equiv 2^k \end{aligned}$$

となる. 奇数 $2k+1$ について, $k=3j,\ 3j+1,\ 3j+2$ の場合分けで考えると

- $n=2k+1=6j+1$ のとき
  $$a_n = a_{6j+1} \equiv 2^{3j} \equiv (7+1)^j \equiv 1$$
- $n=2k+1=6j+3$ のとき
  $$a_n = a_{6j+3} \equiv 2^{3j+1} \equiv (7+1)^j\cdot 2 \equiv 2$$
- $n=2k+1=6j+5$ のとき
  $$a_n = a_{6j+5} \equiv 2^{3j+2} \equiv (7+1)^j\cdot 4 \equiv 4$$

が分かる. 以上をまとめると, a_n を 7 で割ったときの余り r_n は,

$$r_n = \begin{cases} 0 & (n\text{ が偶数}) \\ 1 & (n=6j+1,\ j=1,2,3,\ldots) \\ 2 & (n=6j+3,\ j=0,1,2,\ldots) \\ 4 & (n=6j+5,\ j=0,1,2,\ldots) \end{cases}$$

計　　　点

数 学 解 答 用 紙

受験番号	

〔4〕

(1) $x \geqq 0$ において, $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{(1+x)^3}$ は $x=1$ で符号を負から正へと変える. したがって, $x=1$ で最小値 $y = \dfrac{e}{4}$ をとる.

(2) (1) より, $x \geqq 0$ のとき $\dfrac{e^x}{(1+x)^2} \geqq \dfrac{e}{4}$ であるから,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{4}e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ &= e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{e^x}{(1+x)^2}\right) \\ &\leqq e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{e^x}{(1+x)^2}\right) \\ &\leqq e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{e}{4}\right) \qquad < 0 \qquad (\because\ \sqrt{2} < e) \end{aligned}$$

となり, $x \geqq 0$ において $f(x)$ は減少関数である. したがって, 逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することが分かる.

さらに, $f(0) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であるから, 逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域が $0 < x \leqq 1$ であることが分かる.

(3) $t = f^{-1}(x)$, $0 < x \leqq 1$ とすると, $f(t) = x$ であり, $f(0) = 1$, $f(2n\pi) = \frac{1}{1+2n\pi}$ である. したがって, 置換積分 $x = f(t)$ を考えると,

$$\frac{dx}{dt} = f'(t),$$

x	$\frac{1}{1+2n\pi}$ $\to$ 1
t	$2n\pi$ $\to$ 0

より, 求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{1+2n\pi}}^{1} f^{-1}(x)dx &= \int_{2n\pi}^{0} f^{-1}\big(f(t)\big)f'(t)dt \\ &= -\int_0^{2n\pi} t\,f'(t)dt = \int_0^{2n\pi} f(t)dt - [tf(t)]_0^{2n\pi} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2n\pi} e^{-t}\sin t\,dt + [\log(t+1)]_0^{2n\pi} - \frac{2n\pi}{1+2n\pi} \\ &= \frac{1}{8}(1-e^{-2n\pi}) + \log(1+2n\pi) - \frac{2n\pi}{1+2n\pi} \end{aligned}$$

と計算される. ここで, 次の計算を用いた:

$$\begin{aligned} \int_0^{2n\pi} e^{-t}\sin t\,dt &= [-e^{-t}\sin t]_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} e^{-t}\cos t\,dt \\ &= [-e^{-t}\cos t]_0^{2n\pi} - \int_0^{2n\pi} e^{-t}\sin t\,dt \\ &= (1-e^{-2n\pi}) - \int_0^{2n\pi} e^{-t}\sin t\,dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2n\pi} e^{-t}\sin t\,dt = \frac{1}{2}(1-e^{-2n\pi})$$

計	点
合計	点