出題意図（一般選抜：数学）

福島県立医科大学保健科学部では、本学保健科学部アドミッションポリシーで示している「求める学生像」に合致し、専門医療技術者として必要な基礎学力を有する学生を求めています。そのため、入学後の修学において必要な数学の基礎学力を測るための試験を課しています。

令 和 8 年 度
保健科学部 一般選抜試験

数 学 解 答 用 紙

受験番号	

(2 枚のうちの 1)

〔1〕 以下の (　　　　) 内に答えだけを書け。

(1) ($2e\sqrt{\pi}$)

(2) ($\dfrac{\sqrt{7}}{7}$)

(3) ($\dfrac{\pi^2}{3}-(\sqrt{3}-1)\pi$)

(4) ($1+2n-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n^4$)

(5) ($1-i,\quad 1+i$)

(6) (1.1386)

(7) ($-1-4\sqrt{2}\leqq x\leqq 1-\sqrt{2},\quad 1+\sqrt{2}\leqq x\leqq 5$)

(8) (0.02)

〔2〕 解答と解答に至るまでの導出過程を記述せよ。

(2 枚目へ)

計	点

令　和　8　年　度
保健科学部　一般選抜試験

数学解答用紙

受験番号	

〔2〕 **(続き)**

(1) a の次数に着目すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(ax)^2 + (3x^2-7)ax + x^4 - 3x^2 - 4 \\ &= 2(ax)^2 + (3x^2-7)ax + (x^2-4)(x^2+1) \\ &= (ax+x^2-4)(2ax+x^2+1) \end{aligned}$$

と因数分解できる．$g_1(0) < g_2(0)$ だから，

$$g_1(x) = x^2+ax-4, \qquad g_2(x) = x^2+2ax+1$$

(2) 方程式① $x^2+ax-4=0$ の判別式は $a^2+16>0$ だから，すべての実数 a に対して①は異なる 2 つの実数解を持つ。

方程式② $x^2+2ax+1=0$ の判別式は $4(a^2-1)$ だから，②の異なる実数解の個数は，

2 個 $(a<-1,\ 1<a)$，　1 個 $(a=\pm 1)$，　0 個 $(-1<a<1)$

また，①と②が共通解 α を持つとすると

$$\begin{array}{rl} & 2\alpha^2+2a\alpha = 8 \\ -) & \alpha^2+2a\alpha = -1 \\ \hline & \alpha^2 = 9 \end{array} \qquad \alpha = \pm 3, \quad a = \frac{4-\alpha^2}{\alpha} = \mp\frac{5}{3}$$

$x^2+ax-4 \equiv x^2+2ax+1$ となる a はないから，
③ $f(x)=0$ の実数解の個数を表にまとめると

	a	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
解	①	2	2	2	2	2	2	2	2	2
の	②	2	2	2	1	0	1	2	2	2
個	共通	0	1	0	0	0	0	0	1	0
数	③	4	3	4	3	2	3	4	3	4

(3) $a>0$ で，方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数が 3 個になるのは $a=1,\ \frac{5}{3}$ のときである．

(i) $a=1$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x-4)(x+1)^2 \\ f'(x) &= (2x+1)(x+1)^2 + 2(x^2+x-4)(x+1) \\ &= [(2x+1)(x+1)+2(x^2+x-4)](x+1) \\ &= (2x^2+3x+1+2x^2+2x-8)(x+1) \\ &= (4x^2+5x-7)(x+1) \\ &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1,\ \frac{-5\pm\sqrt{137}}{8} \end{aligned}$$

となり，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{-5-\sqrt{137}}{8}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{-5+\sqrt{137}}{8}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(ii) $a=\frac{5}{3}$ のとき，$\alpha=-3$ が重解であり，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+\frac{5}{3}x-4)(x^2+\frac{10}{3}x+1) \\ &= (x+3)(x-\frac{4}{3})(x+3)(x+\frac{1}{3}) \\ &= (x^2-x-\frac{4}{9})(x+3)^2 \\ f'(x) &= (2x-1)(x+3)^2 + 2(x^2-x-\frac{4}{9})(x+3) \\ &= [(2x-1)(x+3)+2(x^2-x-\frac{4}{9})](x+3) \\ &= (2x^2+5x-3+2x^2-2x-\frac{8}{9})(x+3) \\ &= (4x^2+3x-\frac{35}{9})(x+3) \\ &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3,\ \frac{-9\pm\sqrt{641}}{24} \end{aligned}$$

となり，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

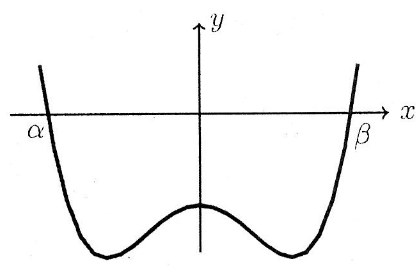
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{-9-\sqrt{641}}{24}$	$\cdots$	$\frac{-9+\sqrt{641}}{24}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(4) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}ax^4 + (\frac{2}{3}a^2-1)x^3 - \frac{7}{2}ax^2 - 4x$ を $g_1(x)=x^2+ax-4$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ は

$$Q(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{11}{20}ax^2 + \left(\frac{7}{60}a^2 - \frac{1}{5}\right)x - \left(\frac{7}{60}a^2 + \frac{11}{10}\right)a$$
$$R(x) = \left(\frac{7}{60}a^4 + \frac{47}{30}a^2 - \frac{24}{5}\right)x - \left(\frac{7}{15}a^2 + \frac{22}{5}\right)a$$

(5) $f(x)=0$ の実数解の個数が 2 個になるのは $-1<a<1$ のときで，$f(x)=0$ の解 α, β は，$g_1(x)=x^2+ax-4=0$ の解だから

$$\alpha = \frac{-a-\sqrt{a^2+16}}{2}, \quad \beta = \frac{-a+\sqrt{a^2+16}}{2}$$ である。



$F(x) = Q(x)g_1(x) + R(x)$ より，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= F(\alpha) - F(\beta) = R(\alpha) - R(\beta) \\ &= \left(\frac{7}{60}a^4 + \frac{47}{30}a^2 - \frac{24}{5}\right)(\alpha-\beta) \\ &= \left(\frac{24}{5} - \frac{47}{30}a^2 - \frac{7}{60}a^4\right)\sqrt{a^2+16} \end{aligned}$$