

**福島県立医科大学  
総合科学教育研究センター 紀要**

**Volume 14 November 2025**

公立大学法人 福島県立医科大学  
総合科学教育研究センター

## 目 次

### 論文

- (総合論文) ゲージ理論と4次元トポロジー：素粒子物理の理論を用いて4次元多様体  
を見分ける

中村 信裕 1

- (原著論文) Text mining of student feedback as a tool to improve medical education

Takachika Takimoto, Kenneth E Nollet, Aya Goto 12

### 総合科学研究会報告

- 2024年12月以降に開催した総合科学研究会プログラム 22

# ゲージ理論と4次元トポロジー

素粒子物理の理論を用いて4次元多様体を見分ける

中村 信裕\*

Received 27 August 2025, Revised 17 November 2025, Accepted xx November 2025

## 1 序：トポロジーとゲージ理論

トポロジーとは、空間の本質、空間そのもの、空間固有の性質を調べる数学分野である。よくある直観的な説明では、空間を、途中で破ったりくっつけたりしないで連続的に変形していったとしても変わらない性質を調べるのがトポロジーであると言われる。変形によって変わらないものとは、長さ・大きさ・角度のように空間に付随していると考えられるものさえ空間から引き剥がしたとしてもなおそこにある空間自体の性質である。あらゆる夾雑物を削ぎ落とした果てに現れる空間の構造の基底を追求することがトポロジーの中心テーマと言える。

物質そして宇宙の究極的な根源を探る素粒子論も20世紀以降に顕著な発展を見せた学問分野である。現代の素粒子物理学は場の量子論として定式化されている。ゲージ理論はその場の理論の一種であるが、一見トポロジーと直接的な関わりがあるようには見えない。<sup>1</sup>

1980年代初頭、ゲージ理論とトポロジーの関わりが決定的となる研究が現れる。数学者サイモン・ドナルドソンがヤン＝ミルズ理論（非可換ゲージ理論）を用いて4次元多様体<sup>2</sup>のトポロジーに関する驚くべき定理を証明したのだ。1970年代までに、Morse理論、手術理論などの発展により高次元（5次元以上）のトポロジーについてはかなりのことがわかっていた。しかし高次元の議論の核心部分は4次元では破綻してしまい、4次元は未知の次元として残されていた。そこへ

ドナルドソンの研究が登場する。ドナルドソン [2] は「閉4次元多様体の交叉形式が定値なら標準的なものと同型である」という驚愕の定理をゲージ理論によって証明した。当時はそんな手法がトポロジーに応用可能だとはほとんど想像されていなかったに違いない。<sup>3</sup> この研究は大きな衝撃をもたらした。低次元（4次元以下の）トポロジーの様相を一変させた。その衝撃から40年余り、現在もゲージ理論は4次元トポロジーの主要な研究手法として活発に研究されており、筆者もその研究に携わる一人である。

本稿はゲージ理論と4次元トポロジーの関わりを可能な限り数学の中身に分け入って解説する。ドナルドソンの理論について最初から述べるのは難しいので、その前段階として可換なゲージ理論（電磁気学）とトポロジーの関わりについて詳しく解説し、その後非可換なゲージ理論とドナルドソン理論の概説へと進む。<sup>4</sup>

## 2 電磁場と微分形式

### 2.1 いくつかの用語の準備

実数全体の集合を  $\mathbb{R}$  と書く。実  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  ( $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$ ) 全体の空間を  $\mathbb{R}^n$  と書く。すなわち、

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$  の内積を  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  と表す。すなわち

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x^i y^i.$$

<sup>3</sup>このような業績によりドナルドソンは数学のノーベル賞とも言われるフィールズ賞を24才で受賞している。

<sup>4</sup>予備知識としては、大学初年級の線形代数、多変数の微積分と、マクスウェル方程式をいじったことがあるぐらいを想定している。

\*福島県立医科大学 総合科学教育研究センター

<sup>1</sup>ただし、橋本義武氏は [6] において、電磁気学（最初のゲージ理論と言ってよい）について「結局、電磁気学はトポロジー的な現象」であると述べ、ガウスの法則、アンペールの法則がトポロジー的な法則であることを指摘している。さらにガウスの法則とアンペールの法則はトポロジー的な一つの公式にまとめられることを指摘し、マクスウェルの方程式は、電磁ポテンシャルの存在と、この公式から成っていると説明する。またポインティング・ベクトル場がトム形式と理解できることも指摘している。

<sup>2</sup>多様体は曲面を高次元の空間に拡張したもので、現代幾何学の主要な研究対象である。§3.1 参照。

この内積を一般の内積と区別して  $\mathbb{R}^n$  の標準的内積と呼ぶことがある。また  $\mathbf{x}$  の大きさを  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  とする。  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  と  $r \in \mathbb{R}$  に対し、  $\mathring{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$  は  $\mathbf{a}$  を中心とし半径が  $r$  の開球を表す。  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  ( $B_\alpha = \mathring{B}_{r_\alpha}(\mathbf{a}_\alpha)$ ) を様々な中心と半径をもつ開球の族とすると、和集合  $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合と呼ぶ。

$\mathbb{R}^n$  の開集合  $U, V$  に対し、写像  $f: U \rightarrow V$  が一対一対応であれば逆写像  $f^{-1}: V \rightarrow U$  が存在する。  $f$  も  $f^{-1}$  も連続であるとき、  $f$  を同相写像と呼ぶ。

$\mathbb{R}^n$  上の関数  $f$  が、任意の階数の任意の偏導関数を持つとき  $C^\infty$  級関数という。

## 2.2 電磁場

マックスウェルの方程式を復習しよう。電場を  $\mathbf{E}$ 、磁束密度を  $\mathbf{B}$  とする。光速を  $c = 1$  とするとき、電荷も電流もない真空中のマックスウェルの方程式は次のように表された。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}. \end{cases} \quad (2.2)$$

電磁場  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  はスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて表すこともできた。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

$\phi, \mathbf{A}$  をまとめて電磁ポテンシャルと呼んだ。

具体的に書くなら、  $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  の成分が<sup>5</sup>、  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ 、  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ 、  $\mathbf{B} = (B_{23}, B_{31}, B_{12})$  のとき、

$$E_i = -\partial_i \phi - \partial_t A_i, \quad B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

である。このとき、  $\nabla$  やベクトルの外積の定義から (2.2) は自動的に導かれる。

与えられた電磁場  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  に対し、その  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  を与える電磁ポテンシャルの取り方は一意ではない。関数  $g$  を用いて  $(\phi, \mathbf{A})$  を次のように変換しても、同じ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  を与える。

$$\phi \mapsto \phi - \partial_t g, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla g. \quad (2.3)$$

上の変換をゲージ変換と呼んだ。

## 2.3 線積分、面積分

次の目標はマックスウェルの方程式を微分形式というものを使って書き表すことである。これにより電磁気学は一般次元の多様体へと自然に拡張される。本節では線積分・面積分について復習し、次節で微分形式を導入する。<sup>5</sup>

有界閉区間  $I = [t_0, t_1]$  上の  $C^\infty$  級写像<sup>6</sup>  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $\gamma'(t) \neq 0$  ( $t \in I$ ) を満たし、像  $C = \gamma(I)$  が自分自身と交わらないとき  $C = \gamma(I)$  を  $\mathbb{R}^n$  内の滑らかな曲線と呼ぶ。曲線  $C$  上の関数  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$  級であるとは、  $f(\gamma(t))$  が  $t \in I$  の  $C^\infty$  級関数であることと定義する。このときパラメータ  $t$  を、  $C$  上の点  $\gamma(t)$  に対し  $t$  を対応させる関数とみなすと  $C$  上の  $C^\infty$  級関数である。これを  $C$  の座標系と呼ぶ。  $C$  上の  $C^\infty$  級関数  $\tilde{t}$  が  $\frac{d\tilde{t}(\gamma(t))}{dt} \neq 0$  ( $t \in I$ ) を満たすとき、  $\tilde{t}$  は  $C$  の別の座標系を与える。  $C$  上の座標  $t$  について「 $t$  の増える向き」を考えることができる。二つの座標系  $t, \tilde{t}$  について、「 $t$  の増える向き」と「 $\tilde{t}$  の増える向き」が一致するのは  $\frac{d\tilde{t}(\gamma(t))}{dt} > 0$  のときである。向きを指定した曲線を有向曲線と呼ぶ。

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数とする。  $P = \gamma(t_0)$ 、  $Q = \gamma(t_1)$  とする。このとき

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = f(Q) - f(P)$$

この積分は座標によらない。すなわち、座標系の取り替えに関して不変である。実際、  $\tilde{t}$  を向きが同じ別の座標系とし、  $\tilde{t}_0 = \tilde{t}(t_0)$ 、  $\tilde{t}_1 = \tilde{t}(t_1)$  とすると、

$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \frac{df}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt = f(Q) - f(P)$$

そこでこの積分を  $\int_C df$  と表す。一般に、  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数としたとき

$$\int_C f dg = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \frac{dg(\gamma(t))}{dt} dt$$

を線積分と呼ぶ。<sup>7</sup> 線積分は  $C$  の座標によらない。

<sup>5</sup>本節・次節の内容は [6] の記述に基づく。

<sup>6</sup> $I$  の内部で  $C^\infty$  であって、任意の  $k$  次導関数が  $I$  に連続に拡張できることとする。

<sup>7</sup> $\int_C df$  は曲線の端点のみで決まったが、一般に  $\int_C f dg$  は曲線  $C$  に依存する。

平面上の有界閉集合  $D$  で境界  $\partial D$  が区分的に  $C^\infty$  級関数であるものを考える。平面の座標を  $(u, v)$  とする。  $C^\infty$  級写像<sup>8</sup>  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  について、ベクトル  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  が  $D$  の各点で一次独立であり、像  $S = \varphi(D)$  が自分自身と交わらないとき  $S$  を  $\mathbb{R}^n$  内の曲面と呼ぶ。

曲面  $S$  上の関数  $f$  が  $C^\infty$  級関数であるとは、  $f(\varphi(u, v))$  が  $(u, v) \in D$  の  $C^\infty$  級関数であることとする。  $u, v$  も  $S$  上の  $C^\infty$  級関数である。  $(u, v)$  を  $S$  の座標系と呼ぶ。

$S$  の二つの座標系  $(u, v)$ ,  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  が同じ向きとは、ヤコビアン  $\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}$  が正であることとする。向きを指定した曲面を有向曲面と呼ぶ。

$\mathbb{R}^n$  上の  $C^\infty$  級関数  $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  と、有向曲面  $S$  に対し、

$$\int_S f dg dh = \int_D f(\varphi(u, v)) \frac{\partial(g(\varphi(u, v)), h(\varphi(u, v)))}{\partial(u, v)} du dv$$

を面積分と呼ぶ。これは  $S$  の座標系によらない。

$\int_C df$  は  $C$  の端点での  $f$  の値で表せた。同様に  $\int_S f dg dh$  を  $S$  の境界  $\partial S$  上の積分として表すことができる。

**定理 1** (ストークスの定理)。  $S$  の向きから  $\partial S$  の向きをしかるべく定めると

$$\int_S dg dh = \int_{\partial S} g dh$$

## 2.4 微分形式

前述のように  $C^\infty$  級関数  $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、線積分  $\int_C f dg$ , 面積分  $\int_S f dg dh$  は  $C, S$  の座標によらない。このことは  $\mathbb{R}^n$  上に  $fdg, fdg dh$  というものがある、有向曲線  $C$  や有向曲面  $S$  が与えられるごとに線積分、面積分を考えることができる、というふうに見なせることを意味する。しかも単にそのように見なせるというだけでなく、それらを微分形式と呼ばれる有用なシステムに仕立て上げることができる。  $fdg$  は 1 次微分形式である。  $fdg dh$  は  $fdg \wedge dh$  と書かれて、これは 2 次微分形式である。本節ではこれらのことを説明したい。

$(x^1, \dots, x^n)$  を  $\mathbb{R}^n$  の自然な座標とすると、各  $x^i$  は  $\mathbb{R}^n$  上の  $C^\infty$  級関数であるので、  $dx^i$  を考えることが

できる。すると  $df$  と  $dx^i$  たちの関係は次のように与えられると考えられる。

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

このことの根拠は、任意の有向曲線  $C$  に対して

$$\int_C df = \int_C \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

が成り立つことである。

きちんとした定式化を説明しよう。  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U, V$  に対し、  $U$  から  $V$  への  $C^\infty$  写像で、逆写像が存在し、逆写像も  $C^\infty$  級写像であるものを微分同相写像と呼ぶ。  $C^\infty$  級写像  $\varphi = (x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  であって、  $U$  から像  $\varphi(U)$  への微分同相写像になっているものを  $U$  の座標系と呼ぶ。開集合  $U$  上の  $C^\infty$  級関数は一つの座標系について  $C^\infty$  級なら他の座標系でも  $C^\infty$  級である。つまり  $U$  上  $C^\infty$  級であるということは座標によらない概念である。そこで  $U$  上の  $C^\infty$  級関数全体の空間を  $C^\infty(U)$  と表す。  $C^\infty(U)$  には和と実数倍が自然に定義され、  $\mathbb{R}$  上の線型空間となる。<sup>9</sup>

写像  $e^i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  を、第  $i$  成分が恒等的に 1、他の成分が恒等的に 0 である写像とする。すると  $C^\infty$  級写像  $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$  を係数とする一次結合として  $f = f_1 e^1 + \dots + f_n e^n$  と一意に表される。そこで  $U$  から  $\mathbb{R}^n$  への  $C^\infty$  級写像全体の空間を次の一次結合全体の空間と同一視する。

$$\Omega^1(U) = \{f_1 e^1 + \dots + f_n e^n \mid f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)\}$$

この  $\Omega^1(U)$  は数学的には  $e^1, \dots, e^n$  を基底とする  $C^\infty(U)$  上の自由加群と呼ばれるものである。  $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$ ,  $f \in C^\infty(U)$  に対し、和  $\alpha + \beta$ ,  $f$  倍  $f\alpha$  が  $\Omega^1(U)$  の元として自然に定義される。また  $\Omega^1(U)$  は和と実数倍に関して  $\mathbb{R}$  上の線型空間である。線型写像

$$d: C^\infty(U) \rightarrow \Omega^1(U), \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} e^i$$

を考える。<sup>10</sup> 座標の成分  $x^i$  は  $U$  上の  $C^\infty$  級関数であり、上の定義から  $dx^i = e^i$  である。すると  $\Omega^1(U)$  の元は

$$f_1 dx^1 + \dots + f_n dx^n$$

<sup>8</sup>  $D$  の内部で  $C^\infty$  級であって、任意の  $k$  次導関数が  $D$  全体に連続に拡張できることとする。

<sup>9</sup>  $C^\infty(U)$  は  $\mathbb{R}$  上無限次元の線型空間である。

<sup>10</sup> ベクトル解析の記号を使うなら  $df = \nabla f = \text{grad } f$  である。

と表すことができる。これを  $U$  上の 1 次微分形式と呼ぶ。また

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

を  $f$  の全微分, あるいは外微分と呼ぶ。

$U$  上の別の座標系  $(y^1, \dots, y^n)$  に対し

$$dy^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i, \quad dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$$

であるので,  $dy^1, \dots, dy^n$  も  $\Omega^1(U)$  の基底であり,

$$df = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j$$

となる。したがって  $\Omega^1(U)$  も外微分  $d: C^\infty(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  も座標によらない。

$dx^1, \dots, dx^n$  の積  $\wedge$  を

$$dx^i \wedge dx^i = 0, \quad (2.4)$$

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad (2.5)$$

を満たすものとして定義する。さらに, 形式的な和  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} dx^i \wedge dx^j$  ( $f_{ij} \in C^\infty(U)$ ) を考え, これを 2 次微分形式 (2 形式) と呼ぶ。2 次微分形式全体のなす空間を  $\Omega^2(U)$  とする。  $\Omega^2(U)$  にも和と  $f$  倍が自然に定義される。 (2.5) から  $f_{ji} dx^j \wedge dx^i = -f_{ji} dx^i \wedge dx^j$  なので,  $\Omega^2(U)$  は  $dx^i \wedge dx^j$  ( $i < j$ ) を基底とする  $C^\infty(U)$  上の自由加群となる。また,  $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$  に対し, 外積と呼ばれる積  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^2(U)$  が自然に定義される。<sup>11</sup> さらに形式和  $\sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  ( $f_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ ) を  $U$  上の  $k$  次微分形式 ( $k$  形式) と呼び,  $k$  次微分形式全体の空間を  $\Omega^k(U)$  と表す。  $\Omega^k(U)$  も座標によらない。また  $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$  とする。 (2.4) より,  $k > n$  なら  $\Omega^k(U) = 0$  である。  $\alpha \in \Omega^k(U)$ ,  $\beta \in \Omega^l(U)$  に対しても, 外積  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(U)$  を自然に定義することができる。また外微分作用素  $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  が定義される。これは  $k=0$  の場合の  $d$  を次のルールにより帰納的に拡張して定義する。  $\alpha \in \Omega^k(U)$ ,  $\beta \in \Omega^l(U)$  について,

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

$$d(dx^i) = 0.$$

一般に  $dd=0$  が成り立つ。  $d$  も座標によらない。

<sup>11</sup>例えば  $(f_1 dx^1 + f_2 dx^2) \wedge (g_1 dx^1 + g_2 dx^2) = f_1 g_2 dx^1 \wedge dx^2 + f_2 g_1 dx^2 \wedge dx^1 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx^1 \wedge dx^2$  である。

## 2.5 マックスウェルの方程式の微分形式による書き換え

$\mathbb{R}^4$  の座標を  $(t, x^1, x^2, x^3)$  とする。  $t$  は時間を表し,  $(x^1, x^2, x^3)$  は空間の座標を表す。  $d\mathbf{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$  とし,  $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ ,  $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$  を次のように定義する。

$$A = -\phi dt + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = -\phi dt + \sum_{i=1}^3 A_i dx^i,$$

$$F = dA = \sum_i E_i dx^i \wedge dt + \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

物理では  $A$  をゲージ場,  $F$  を場の強さという。

ゲージ変換は,  $\mathbb{R}^4$  上の  $C^\infty$  関数  $g$  に対し  $A \mapsto A + dg$  と表される。ゲージ変換全体を  $\mathcal{G}_0$  と表す。  $\mathcal{G}_0 = C^\infty(\mathbb{R}^4)$  とみなせる。

さらに次の式を用いて, Hodge star 作用素  $*$ :  $\Omega^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^4)$  を定義する。<sup>12</sup>

$$*(dx^i \wedge dt) = dx^j \wedge dx^k, \quad *(dx^j \wedge dx^k) = -dx^i \wedge dt.$$

但し,  $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ 。

するとマックスウェルの方程式 (2.1), (2.2) は次のように書き直すことができる。

$$dF = ddA = 0 \Leftrightarrow (2.2),$$

$$d * F = d * dA = 0 \Leftrightarrow (2.1).$$

$dd=0$  なので  $dF=0$  は自動的に成り立つ。  $d * F = d * dA = 0$  はヤン=ミルズ方程式と呼ばれる。<sup>13</sup>

$ddg=0$  なので  $A$  がヤン=ミルズ方程式の解ならば  $A$  をゲージ変換で移した  $A + dg$  も解である。二つの解  $A, A'$  がゲージ変換で移り合う時, すなわち  $A' = A + dg$  となる  $g$  が存在する時,  $A$  と  $A'$  はゲージ同値であると言う。解  $A$  とゲージ同値な解を全部集めた集合を  $A$  のゲージ同値類と呼び,  $[A]$  と書く。

$$[A] = \{A + dg \mid g \in \mathcal{G}_0\}.$$

さらに解のゲージ同値類全体の集合を解のモジュライ空間と呼び,  $\mathcal{M}$  と書く。

$$\mathcal{M} = \{[A] \mid A \text{ は } d * dA = 0 \text{ の解}\}.$$

<sup>12</sup>一般に作用素  $*$  は座標によって形を変えてしまうが, Minkowski 計量と呼ばれるある種の内積を保つ座標変換に対しては不変である。Minkowski 計量では, ベクトルの大きさの自乗に相当するノルムが  $-t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$  によって与えられる。

<sup>13</sup> $F$  に対して  $*$  は電場と磁場の入れ替えとして作用する。

### 3 多様体上のゲージ理論

#### 3.1 $C^\infty$ 多様体

この節の目標はマックスウェルの方程式を微分形式を用いて一般の多様体の上で書くことである。

多様体は一言で言うなら曲面を高次元の空間に拡張したものである。すぐ後に述べるように、その空間のどの点の近くも  $\mathbb{R}^n$  の一部と同じに見えることが多様体の定義となる。多様体は現代幾何学の主要な研究対象である。球面は 2 次元多様体の例であるが、局所的には平面  $\mathbb{R}^2$  と同じに見えても大域的には  $\mathbb{R}^2$  と異なる。多様体のトポロジー (位相) を調べることは常にトポロジーの中心的課題である。<sup>14</sup>

空間  $M$  が  $n$  次元位相多様体であるとは、<sup>15</sup>  $M$  の各点  $x$  に近傍  $U$  と、連続写像  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  が取れ、 $\varphi$  が  $U$  から  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $V$  への同相写像となっていることをいう。このとき  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  を局所座標系、 $(U, \varphi)$  を座標近傍と呼ぶ。ある点の近くに二つの局所座標系  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi': U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  があったとき、 $\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$  は座標変換を与え、これは同相写像である。

多様体の基本的な例として、

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

を  $n$  次元球面という。<sup>16</sup>

$M$  上の関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  が連続であるとは、 $f$  の各座標近傍への制限  $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  が連続であることである。連続性の定義に座標近傍を用いているが、 $f$  が一つの座標系で連続なら、別の座標系でも連続であるので、 $f$  の連続性は座標によらない概念である。<sup>17</sup> 二つの多様体  $M, N$  の間の写像  $f: M \rightarrow N$  が連続であることも同様に定義される。

多様体間の連続写像  $f: M \rightarrow N$  が 1 対 1 写像であり、逆写像  $f^{-1}$  も連続であるとき  $f$  を同相写像と呼

ぶ。多様体  $M, N$  の間に同相写像が存在するとき  $M$  と  $N$  は同相であるという。<sup>18</sup>

位相多様体  $M$  の上に任意の座標変換が  $C^\infty$  級写像であるような座標近傍系  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  が与えられているとき、 $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda})$  を  $C^\infty$  多様体と呼ぶ。 $S^n$  は  $C^\infty$  多様体である。以下単に多様体と言ったら  $C^\infty$  多様体のこととする。

多様体  $M$  上の関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$  級であるとは、 $f$  の各座標近傍への制限  $f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$  級であることである。連続関数のときと同様に、関数  $f$  が  $C^\infty$  級であることは座標によらない概念である。二つの多様体  $M, N$  の間の写像  $f: M \rightarrow N$  が  $C^\infty$  級であることも同様に定義される。

多様体間の  $C^\infty$  級写像  $f: M \rightarrow N$  が 1 対 1 写像であり、逆写像  $f^{-1}$  も  $C^\infty$  級であるとき  $f$  を微分同相写像と呼ぶ。<sup>19</sup> 多様体  $M, N$  の間に微分同相写像が存在するとき  $M$  と  $N$  は微分同相であるという。多様体の微分同相で不変な性質を研究するトポロジーの分野は微分トポロジーと呼ばれている。

さて、次の  $B^{n+1}$  を  $n+1$  次元球体と呼ぶ。

$$B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$$

$B^{n+1}$  は  $S^n$  を境界に持ち、境界の近傍は  $\mathbb{R}^n$  の開集合と同相にならない。したがって上の多様体の定義に当てはまっていないのだが、しかるべく定義を拡張することによりこのようなものを境界付き多様体と呼ぶ。境界付き多様体  $M$  の境界を  $\partial M$  と書く。

$S^n$  や  $B^{n+1}$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の有界な領域に収まっているが  $\mathbb{R}^k$  は無限に広がっている。ざっくりした言い方で (事実上意味を持たない表現で) あるが無限に広がっていない空間をコンパクトという。

コンパクトで境界の無い多様体を閉多様体と呼ぶ。

「向き付け」の概念も多様体に拡張される。<sup>20</sup> 向きの付けられた多様体を有向多様体と呼ぶ。

<sup>14</sup>以下 §3.1, 3.2, 3.3 の参考文献として [11, 12] を挙げる。

<sup>15</sup>数学的にきちんと言うと  $M$  は位相空間である。差し当たり  $M$  は十分大きな次元の  $\mathbb{R}^N$  の部分集合とみなしてこの後を読んでいただくとうい。

<sup>16</sup> $S^n$  の各点  $x$  は大きさ 1 のベクトルなのでどれかの成分が 0 でない。例えば  $x^{n+1} > 0$  だったとする。  $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $\tilde{\varphi}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^n)$  と定義し、 $U = S^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^{n+1} > 0\}$  とすると、 $\tilde{\varphi}$  の  $U$  への制限が  $x$  の近くの座標近傍を与える。

<sup>17</sup>座標によらないということは、 $M$  に固有の性質であるということだ。

<sup>18</sup>同相で保たれる量や性質を位相不変であるという。トポロジーの第一のテーマは空間の位相不変な性質を研究することである。また、例えば  $\mathbb{R}^N$  の中にある多様体  $M$  を連続的に変形させるとき、元々の  $M$  の各点に変形により移った先に対応させることで同相写像が得られる。途中で破いたりくっつけたりすると同相写像にならなくなる様子を観察してみるとよい。

<sup>19</sup>これは §2.4 で述べた  $\mathbb{R}^n$  の開集合の微分同相写像の概念の拡張になっている。

<sup>20</sup>多様体の座標系として任意の座標変換  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  のヤコビアンが正であるものが取れるとき向き付け可能という。メビウスの帯やクラインの壺は向き付け可能でない多様体である。

二つの空間が同相のとき同じ値を取る量を**位相不変量**と呼ぶ。位相不変量が二つの多様体で異なる値であるならばそれらは同相でない。基本的な位相不変量として**オイラー標数**  $\chi(M)$  がある。閉 2 次元多様体 (閉曲面)  $\Sigma$  に対して、 $\Sigma$  を多角形に分割することで、オイラー標数を次のように定義することができる。

$$\chi(\Sigma) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}).$$

閉曲面はオイラー標数で位相的に分類されることが知られている (図 1).<sup>21</sup>





					...
オイラー標数	2	0	-2	-4	...
種数 (genus)	0	1	2	3	...

図 1: 閉曲面の分類

円周  $S^1$  の場合、 $S^1$  を多角形の周と見なして頂点と辺に分割すると、頂点と辺の数は等しいので  $\chi(S^1) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) = 0$  となる。高次元の多様体  $M$  についても高次元の多面体を用いて適切に  $M$  を分割することによりオイラー標数  $\chi(M)$  を同様に定義することができる。<sup>22</sup>

二つの多様体は同相であったとしても微分同相とは限らない。1954 年に J. Milnor [7] は、7 次元球面  $S^7$  と同相だが微分同相でない多様体を構成することに成功した。これは微分トポロジーという新しい分野の誕生を告げる大きな事件であった。ある多様体と同相だが微分同相でない多様体を **exotic な多様体** と呼ぶ。<sup>23</sup> 一般に exotic な微分構造を見分けることは難しい。例えばオイラー標数は同相でないことの判定には使えるが exotic な微分構造を見分けることはできない。4 次元において、ゲージ理論はここに威力を発揮する。ドナルドソンの最初の結果 [2] から、 $\mathbb{R}^4$  と同相であるが微分同相でない、exotic な  $\mathbb{R}^4$  が存在することが早々に見出された。 $n \neq 4$  では  $\mathbb{R}^n$  は exotic な微分構造を持たないので、これは衝撃的な結果であった。さら

に、後述するように (§3.6)、ドナルドソンは非可換なヤン＝ミルズ方程式の解のモジュライ空間を用いて 4 次元多様体の微分構造を見分けることができる**ドナルドソン不変量**を構成した。

さて、 $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上の微分形式  $\Omega^k(U)$  や外微分  $d$  は座標によらない概念であった。このことを用いると  $n$  次元多様体  $M$  上にも微分形式  $\Omega^k(M)$  や外微分  $d$  を定義することができる。また、 $M$  が向き付けられていれば  $n$  次微分形式  $\alpha$  に対して積分  $\int_M \alpha$  が定義される。ストークスの定理は次のように一般化される。(証明は、例えば [12] を見よ。)

**定理 2.**  $M$  が  $n$  次元有向コンパクト多様体のとき、 $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$  に対し  $\int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta$ 。特に  $M$  が閉多様体なら  $\int_M d\beta = 0$ 。

後 (§3.3) で簡単に説明するが  $n$  次元多様体  $M$  に計量<sup>24</sup>というものを入れると Hodge star 作用素  $*$ :  $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$  を定義することができる。<sup>25</sup>

すると  $M$  の 1 次微分形式  $A$  に対して、ヤン＝ミルズ方程式  $d * dA = 0$  や解のモジュライ空間  $\mathcal{M}$  を考えることができる。解  $A$  とゲージ同値な解を全部集めた集合を前と同様に  $A$  のゲージ同値類と呼び、それを  $[A]$  とする:  $[A] = \{A + dg \mid g \in \mathcal{G}_0\}$ 。さらに解のゲージ同値類全体の集合を解のモジュライ空間と呼び、 $\mathcal{M}$  と書く。

$$\mathcal{M} = \{[A] \mid A \text{ は } d * dA = 0 \text{ の解}\}.$$

このようにしてマックスウェルの方程式は  $n$  次元多様体へと拡張される。

興味深いことに**モジュライ空間  $\mathcal{M}$  は多様体  $M$  のトポロジーに関する情報を持っていることが明らかになる**。このことについて以下の §3.2–3.5 で説明したい。

## 3.2 de Rham コホモロジー

微分形式と外微分を用いて de Rham コホモロジーというものが定義され、これが多様体  $M$  の位相不変

<sup>21</sup> この辺の事情については第 59 回総合科学研究会 (2023 年 12 月 22 日開催) でお話しさせていただいた [8]。

<sup>22</sup> オイラー標数は、ホモロジー群という位相不変量の次元の交代和として定義するのが現代的な定義である。

<sup>23</sup> 4 次元以上の多様体は exotic な微分構造を持つことがあるが、3 次元以下の閉多様体に対しては exotic な多様体が存在しないことが知られている。

<sup>24</sup> 計量は  $M$  上の図形の長さを図るものさしに相当する。マックスウェルの方程式では  $\mathbb{R}^4$  上の時間成分の係数が  $-1$  の Minkowski 計量を考えたが、以下の話では  $M$  の計量として正定値の計量 (例えばベクトルの大きさの自乗が  $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$  と表せるもの) を考えることにする。

<sup>25</sup>  $*$  は一般に座標によるが、計量を保つ座標変換について不変である。また、 $*$  を 2 回合成すると  $\Omega^k(M)$  からそれ自身への写像となる。一般に  $**\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha$  が成り立つ。特に、 $k$  が偶数のとき  $**\alpha = \alpha$  が成り立つ。



量になることが知られている。本節ではこの de Rham コホモロジーを説明し、後の節でこれとヤン＝ミルズ・モジュライ空間  $\mathcal{M}$  との関係について述べる。

$\mathbb{R}$  上の線型空間  $V$  とその部分空間  $W \subset V$  があったとする。ゲージ変換と同様に、 $V$  の元  $v$  に  $W$  の元  $w$  を足す変換  $v \mapsto v + w$  を考え、この作用で  $v$  と移り合う  $V$  の元全体を  $[v]$  とする。すなわち

$$[v] = \{v + w \mid w \in W\}.$$

さらに、このような  $[v]$  を集めたものを  $V$  の  $W$  による商空間と呼び  $V/W$  と書く。すなわち

$$V/W = \{[v] \mid v \in V\}.$$

$V/W$  は、和と定数倍を  $[v] + [w] = [v + w]$ ,  $a[v] = [av]$  と定めることで線型空間になる。<sup>26</sup>

さて、境界を持たない  $n$  次元多様体  $M$  を考える。 $M$  の微分形式について、次のような外微分の列を考えることができる。

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0.$$

ここで  $d_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) は外微分、 $d_{-1}$  は 0 の包含写像である。上の列を **de Rham 複体** と呼ぶ。 $d_i$  の核  $\ker d_i$  と像  $\operatorname{im} d_i$  を次のように定義する。

$$\ker d_i = \{\phi \in \Omega^i(M) \mid d_i \phi = 0\},$$

$$\operatorname{im} d_i = \{d_i \phi \mid \phi \in \Omega^i(M)\} \subset \Omega^{i+1}(M).$$

各  $d_i$  は線型写像で  $d_i \circ d_{i-1} = 0$  なので、 $\operatorname{im} d_{i-1}$  は  $\ker d_i$  の線型部分空間であり、商空間が定義される。それを  $H^i(M)$  とする。すなわち、

$$H^i(M) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i-1}.$$

この  $H^i(M)$  を  **$i$  次 de Rham コホモロジー** と呼ぶ。de Rham コホモロジーの主な性質を列挙する。

- $H^i(M)$  は位相不変。同相な多様体は同型な de Rham コホモロジーを持つ。したがって exotic な微分構造を見分けることはできない。<sup>27</sup>

<sup>26</sup>例えば  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  とすると、 $v = (x, y) \in V$  に対し  $[v]$  は  $v$  を通り  $y$  軸に平行な直線である。 $V/W$  は  $y$  軸に平行な直線全体である。このような直線族は  $x$  座標でパラメトライズされており、 $V/W$  は  $x$  軸と同一視できる 1 次元の線型空間である。

<sup>27</sup> $H^i(M)$  が微分位相不変であることは、微分形式や外微分が  $M$  にしかよらず、微分同相写像  $f$  があれば一方の微分形式を  $f^*$  で写してあげることにより、微分形式同士が対応することからわかる。実は de Rham コホモロジーは常コホモロジーという位相不変量と同型であることが de Rham によって示されており、これにより de Rham コホモロジーは微分構造によらない位相不変量であることがわかる。

- $M$  が閉多様体のとき、 $H^i(M)$  は有限次元である。 $H^i(M)$  の次元を  $b_i$  と書く。 $b_i$  は  $i$  次ベッチ数と呼ばれるものに等しい。また、 $M$  のオイラー標数  $\chi(M)$  は  $b_i$  たちを用いて次のように表される。

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i. \quad (3.1)$$

さらに  $M$  が向き付けられているとき、Hodge-star 作用素から  $H^k(M)$  と  $H^{n-k}(M)$  の間の同型写像が導かれる。<sup>28</sup> 特に次が成り立つ

$$b_{n-k} = b_k. \quad (3.2)$$

$M$  が閉曲面のときはヤン＝ミルズ・モジュライ空間  $\mathcal{M}$  が  $H^1(M)$  と同型であることを後で示す (定理 3)。

0 次コホモロジー  $H^0(M)$  を考える。閉多様体  $M$  がいくつかの閉多様体  $M_1, \dots, M_k$  の交わらない和集合に分解しそれ以上分解できないとき、各  $M_j$  を連結成分と呼ぶ。連結成分の個数を  $k$  とする。0 次微分形式  $f$  は関数であり、 $df = 0$  を満たすのは定数関数のみである。 $M$  上の定数関数は、連結成分ごとに定数を決められるので  $H^0(M) = \mathbb{R}^k$  となる。すなわち  $b_0$  は連結成分の個数  $k$  に等しい。

連結成分の個数が一つのとき  $M$  は連結であるという。以下断りがなければ多様体は連結なもののみ考える。

いくつかの具体的な  $M$  に対して de Rham コホモロジーを考えてみよう。まず  $M = S^1$  を考える。 $S^1$  は連結なので  $H^0(S^1) = \mathbb{R}$  である。写像  $I: \Omega^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $I(gdt) = \int_{S^1} gdt$  で定義すると、 $\ker I = \operatorname{im} d_0$  であることが以下のように示せる。 $S^1$  を、区間  $[0, 1]$  の 0 と 1 を滑らかにつなげたものとみなす。 $gdt \in \ker I$  のとき、 $\int_0^1 gdt = \int_{S^1} gdt = 0$  である。 $f(t)$  を  $f(t) = \int_0^t gdt$  により定義すると  $f(0) = f(1) = 0$  なので、 $f(t)$  は  $S^1$  上の関数を定義する。このとき  $\frac{df}{dt} = g$  なので  $df = \frac{df}{dt} dt = gdt$  となる。したがって  $\ker I \subset \operatorname{im} d_0$  である。一方  $\operatorname{im} d_0$  の元は  $S^1$  上の関数  $f$  を用いて  $df$  と表せるので、ストークスの定理から  $I(df) = \int_{S^1} df = 0$  となる。したがって  $\ker I \supset \operatorname{im} d_0$  である。以上より  $\ker I = \operatorname{im} d_0$  であり、このことから  $H^1(S^1) = \mathbb{R}$  を得る。したがって  $b_0 = b_1 = 1$  なので確かに関係式 (3.2) が成り立つ。これより  $b_0 - b_1 = 0$  であり、 $S^1$

<sup>28</sup>これはポアンカレ双対と呼ばれる同型写像と一致する。

のオイラー標数 0 が得られる．関係式 (3.1) も確かめられた．

次に  $M = S^2$  (2次元球面) を考える．まず  $S^2$  は連結なので  $b_0 = 1$ ．ここで関係式 (3.2) を使ってしまうと,  $n = 2$  なので  $b_2 = b_0 = 1$  である． $b_1 = 0$  であることを説明する．そのためには  $\ker d_1 = \text{im } d_0$  を示せばよい． $d_1 d_0 = 0$  より  $\ker d_1 \supset \text{im } d_0$  なので,  $\ker d_1 \subset \text{im } d_0$  を示せばよい．つまり  $da = 0$  である 1 形式  $a$  に対し  $a = df$  となる 0 形式 (関数)  $f$  を作ればよい． $S^2$  上に基点  $x_0$  を選ぶ． $S^2$  上の任意の点  $x$  に対し,  $x_0$  から  $x$  への滑らかな曲線  $C$  を選ぶ．このとき  $f(x) = \int_C a$  により関数  $f(x)$  が定義できる．定義できることを言うために,  $f(x)$  が曲線  $C$  の選び方によらないことを示す必要がある． $C'$  を  $x_0$  から  $x$  への別の曲線とし, 簡単のため  $C$  と交わらないとする．この時  $C$  で  $x_0$  から  $x$  へと進み, 向きを逆にした  $C'$ , すなわち  $-C'$  で  $x_0$  に戻ってくる曲線  $C \cup (-C')$  は  $S^2$  内の loop である． $S^2$  内の loop は必ず  $S^2$  内のある円板の境界になっている． $C \cup (-C')$  を境界とする円板を  $D$  とすると, ストークスの定理より

$$\int_{C \cup (-C')} a = \int_D da = 0.$$

$\int_C a - \int_{C'} a = \int_{C \cup (-C')} a = 0$  より  $\int_C a = \int_{C'} a$  がわかる．つまり  $f(x)$  の定義は  $C$  によらない．次に  $df = a$  となることを説明する．考えている点  $x$  の近くで適当な座標系  $(x^1, x^2)$  を取り, その座標で  $a = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$  と表されたとする． $C$  として  $x$  の近くで  $x^1$  軸または  $x^2$  軸に平行であるものを考えることにより  $\frac{\partial f}{\partial x^1} = a_1, \frac{\partial f}{\partial x^2} = a_2$  が示せる．すなわち  $df = a$  である．以上より  $b_0 = b_2 = 1, b_1 = 0$  である．したがって  $b_0 - b_1 + b_2 = 2$  となり, これは  $S^2$  のオイラー標数 2 と一致し, 確かに関係式 (3.1) が成り立つ．

$M = T^2$  (2次元トーラス) のときは  $b_0 = b_2 = 1, b_1 = 2$  が証明でき,  $b_0 - b_1 + b_2 = 0$  となり  $T^2$  のオイラー標数 0 が得られる． $b_1 = 2$  であることは, 写像  $I: \ker d_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を図 2

の曲線  $\alpha, \beta$  を用いて  $I(a) = (\int_\alpha a, \int_\beta a)$  により定義し, ストークスの定理を利用することで証明できる．

$M = S^n$  ( $n \geq 3$ ) のとき,  $b_0 = b_n = 1, b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$  であることが知られている．

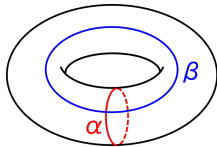


図 2:  $T^2$  上の曲線

一般に,  $M$  内の任意の loop に対し, それを境界とする曲面を  $M$  内に見つけられれば  $b_1 = 0$  であることを  $S^2$  のときと同様に示すことができる． $b_1$  は曲面の境界にならない loop がどのくらいあるかを測る量と理解することができる．例えば 2 次元トーラスでは, 上の図の  $\alpha, \beta$  は (単体で) 境界にならない loop である.<sup>29</sup> 粗い言い方として, そのような曲線が 2 種類あることが  $b_1 = 2$  と対応する．

### 3.3 補足：計量について

$\mathbb{R}^N$  内にある多様体  $M$  について,<sup>30</sup>  $M$  上の図形の長さは  $\mathbb{R}^N$  の距離を用いて測ることができる．一般に  $M$  上の各点でベクトル<sup>31</sup>の内積が定まっていれば  $M$  上の図形の長さを測ることができる．一般に, 二つのベクトル  $u = (u^1, \dots, u^n), v = (v^1, \dots, v^n)$  の内積  $(u, v)$  は次のように与えられる．

$$(u, v) = \sum_{i,j} u^i v^j g_{ij}.$$

ここで各  $g_{ij}$  は実数で,  $g_{ij}$  を  $(i, j)$  成分とする行列を  $(g_{ij})$  とするとき,  $(g_{ij})$  が正定値であることを仮定する．多様体  $M$  の計量は各座標近傍上で正定値な行列に値をもつ  $C^\infty$  級関数として与えられる．

$\mathbb{R}^N$  内の多様体  $M$  を  $\mathbb{R}^N$  の中でぐにゃぐにゃと変形させたとしても  $M$  上の図形もぐにゃぐにゃと変形しその長さを変える．このような変形によって計量は連続的に変化する．

計量が与えられると, 微分形式にも内積が誘導される．1 形式  $\alpha = a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n, \beta = b_1 dx^1 + \dots + b_n dx^n$  に対しては,  $(g_{ij})$  の逆行列を  $(g^{ij})$  として, 内積が  $(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} a_i b_j g^{ij}$  で与えられる.<sup>32</sup>

計量を用いると, Hodge star 作用素  $*$ :  $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$  が定義される．最も簡単な場合についてのみ説明する．計量  $(g_{ij})$  が単位行列であるとき,  $dx^1, \dots, dx^n$  は各点で正規直交基底をなす．すなわち

$$\|dx^i\|^2 = (dx^i, dx^i) = 1, \quad (dx^i, dx^j) = 0 \quad (i \neq j)$$

である．このとき  $k$  次微分形式  $\beta$  に対し,  $*\beta$  は, 任意の  $k$  次微分形式  $\alpha$  に対し次の関係式を満たすもの

<sup>29</sup>例えば  $\alpha$  でトーラスを切り開くと  $\alpha$  と  $-\alpha$  を境界とする円筒ができるが,  $\alpha$  のみを境界としていないことに注意．

<sup>30</sup>正確には  $\mathbb{R}^N$  に埋め込まれている多様体  $M$  を考える．

<sup>31</sup>正確には  $M$  の接ベクトルのことである．

<sup>32</sup>高次の微分形式の内積は少しややこしいので説明を省略する．

として定義される.

$$\alpha \wedge (*\beta) = (\alpha, \beta) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

例えば次が成り立つ.

$$*dx^1 = dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad *(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

### 3.4 閉曲面のヤン=ミルズ・モジュライ空間

この節では閉曲面上のヤン=ミルズ・モジュライ空間を考察する. 結論を言うと, 閉曲面上でヤン=ミルズ方程式を解くと曲面のオイラー標数が計算できることになる. すなわち次が成り立つ.

**定理 3** (Cf. [1]). 向き付けられた閉曲面  $\Sigma$  に対して  $\mathcal{M} = H^1(\Sigma)$  が成り立つ.<sup>33</sup> したがって  $\dim \mathcal{M} = b_1$ ,  $\chi(\Sigma) = 2 - \dim \mathcal{M}$  である.

証明.  $dA$  は 2 次微分形式なので  $*dA$  は 0 次微分形式, すなわち関数であることに注意すると, ヤン=ミルズ方程式  $d*dA = 0$  より  $*dA$  は定数関数  $C$  である. 一方  $\partial\Sigma = \emptyset$  なので, ストークスの定理より

$$\int_{\Sigma} \|dA\|^2 \text{vol}_g = \int_{\Sigma} dA \wedge (*dA) = C \int_{\Sigma} dA = 0$$

なので  $dA = 0$ . したがって, 閉曲面に対しては  $d*dA = 0 \Leftrightarrow dA = 0$  である.<sup>34</sup> このことから  $\mathcal{M}$  は  $H^1(\Sigma)$  と同じものであることがわかる. すなわち

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{A \in \Omega^1(\Sigma) \mid d*A = 0\} / \text{im } d_0 \\ &= \ker d_1 / \text{im } d_0 = H^1(\Sigma). \end{aligned}$$

したがって,  $\dim \mathcal{M} = b_1$ .  $\Sigma$  は連結なので  $b_0 = 1$ . 向き付け可能なので  $b_2 = b_0 = 1$ . したがって  $\Sigma$  のオイラー標数は  $b_0 - b_1 + b_2 = 2 - \dim \mathcal{M}$ .  $\square$

### 3.5 4 次元の場合

$M$  を閉 4 次元多様体とする. 1 次微分形式  $A$  に対し  $F = dA$  として, 物理では  $*F = F$  を満たす  $A$

<sup>33</sup>ヤン=ミルズ方程式  $d*dA = 0$  には Hodge star 作用素が挟まっているので, 計量を変化させると形を変える. したがって解のモジュライ空間  $\mathcal{M}$  も計量によってもおかしくない. 一方右辺の de Rham コホモロジーは位相不変量なので,  $M$  を連続的に変形して連続的に計量を変化させても不変である. この定理は一見計量によっていような空間  $\mathcal{M}$  が計量によらないことを主張している.

<sup>34</sup>これはヤン=ミルズ方程式の解であることが計量によらない性質であることを意味している.

をインスタントン,  $*F = -F$  を満たす  $A$  を反インスタントンと呼ぶ. すると (反) インスタントンはヤン=ミルズ方程式の解を与える.<sup>35</sup> 実際

$$d*dF = \pm dF = \pm ddA = 0.$$

そこで (反) インスタントンのゲージ同値類の空間を  $\mathcal{M}^{\pm}$  と書き, (反) インスタントンのモジュライ空間と呼ぶ.

さて, 自己双対, 反自己双対な 2 次微分形式の空間  $\Omega^+(M)$ ,  $\Omega^-(M)$  をそれぞれ次のように定義する.<sup>36</sup>

$$\Omega^{\pm}(M) = \{\alpha \in \Omega^2(M) \mid *\alpha = \pm\alpha\}.$$

射影  $P^{\pm}: \Omega^2(M) \rightarrow \Omega^{\pm}(M)$  が,  $P^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm *)$  によって定義され, 2 次微分形式  $\alpha$  は  $\alpha = P^+\alpha + P^-\alpha$  というように一意に分解する.

このとき次のような de Rham 複体の部分複体を考えることができる.

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{P^{\pm}d_1} \Omega^{\pm}(M) \rightarrow 0.$$

閉 4 次元多様体  $M$  に対して, ストークスの定理より

$$\begin{aligned} \int_M (\|P^+d_1\alpha\|^2 - \|P^-d_1\alpha\|^2) \text{vol}_g &= \int_M d\alpha \wedge d\alpha \\ &= \int_M d(\alpha \wedge d\alpha) = 0. \end{aligned}$$

したがって  $d_1\alpha = 0 \Leftrightarrow P^+d_1\alpha = 0 \Leftrightarrow P^-d_1\alpha = 0$  である. すると  $\ker d_1 / \text{im } d_0 = \ker P^{\pm}d_1 / \text{im } d_0 = \mathcal{M}^{\pm}$  なので, 次が得られる.

**定理 4** (Cf. [9, §3.5.3a]).  $\mathcal{M}^{\pm} = H^1(M)$ .

すなわち,  $\mathcal{M}^{\pm}$  の次元は  $M$  の 1 次ベッチ数  $b_1$  に等しい. (反) インスタントンの方程式は計量によっているので  $\mathcal{M}^{\pm}$  も計量によっていて不思議ではないが, またしてもこれらは位相不変量になっている.

### 3.6 非可換ゲージ理論とドナルドソン理論

1954 年, 物理学者の楊振寧とロバート・ミルズは原子核レベルではたらく力を説明するために非可換リ-

<sup>35</sup>但し, ヤン=ミルズ方程式の解が全て (反) インスタントンというわけではない.

<sup>36</sup>4 次元多様体の 2 次微分形式に対して  $** = 1$  だったので,  $*$  の固有値は  $\pm 1$  であり,  $\Omega^{\pm}(M)$  はそれぞれ  $*$  の  $(\pm 1)$  固有空間である.

群  $SU(2)$  を用いて電磁気学を拡張した非可換ゲージ理論を提唱した.<sup>37</sup> 前述のように、1980 年代初頭、数学者サイモン・ドナルドソンはヤン＝ミルズ理論を 4 次元微分トポロジーへ応用することに成功した [2, 3].

非可換ゲージ理論において、前節までと大きく異なる点はゲージ場の係数が行列になることである.<sup>38</sup> すなわち、ゲージ場を局所的に  $A = \sum_i A_i dx^i$  と表したとき、 $A_i$  は行列である。外微分  $d$  も共変外微分  $d_A$  というものになり、場の強さ  $F_A$  は次のように表される。<sup>39</sup>

$$F_A = d_A A = dA + A \wedge A.$$

具体的には  $F_A = \sum_{i,j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$  と表したとき、 $F_{ij}$  は次で与えられる。

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + A_i A_j - A_j A_i.$$

単なる外微分  $d$  との大きな違いは、 $d$  が線型作用素だったのに対し、共変外微分  $d_A$  は**非線形**であることだ。実際、上の表示にあるように行列の非可換性を表す 2 次の項  $A_i A_j - A_j A_i$  が現れる。

ゲージ変換  $g$  も行列となり、ゲージ場  $A$  のゲージ変換も非線形になる。<sup>40</sup>

$$A \mapsto gAg^{-1} - dg \cdot g^{-1}.$$

場の強さ  $F_A$  について  $d_A F_A = 0$  が自動的に成り立ち、この式は Bianchi の恒等式と呼ばれている。また Hodge star 作用素  $*$  は行列値に拡張され、ヤン＝ミルズ方程式は

$$d_A * F_A = 0$$

<sup>37</sup>ヤン＝ミルズの元々の  $SU(2)$  ゲージ理論は現実の物理と合わなかったそうだが、その理論構成は  $SU(2) \times U(1)$  対称性を用いた電弱統一理論であるワインバーグ＝サラム理論やクォーク間の強い相互作用を記述する  $SU(3)$  理論である量子色力学へと受け継がれた。例えば [5] を見よ。ここで  $SU(N)$  や  $U(1)$  は行列の種類を表し、ゲージ場等の係数の行列に関係するものだが詳細は省略する。

<sup>38</sup>これまでゲージ場が 1 次微分形式であるとして話を進めてきたが、一般にゲージ場はベクトル束上の接続というものである。接続を説明するにはもう少し準備が必要となるので、本稿ではこれ以上述べないが、接続は局所的には行列に値を持つ 1 次微分形式として表すことができる。前節までの話は考えているベクトル束が自明である場合で、その時は接続を  $M$  全体の上の 1 次微分形式とみなすことができる。

<sup>39</sup> $F_A$  は随伴束と呼ばれるベクトル束を係数とする 2 次微分形式である。

<sup>40</sup>正確にはゲージ変換  $g$  は行列をファイバーとするあるファイバー束の切断というものである。これは局所的には行列に値をもつ関数である。また、 $g^{-1}$  は各点で  $g$  の逆行列を値とするゲージ変換を表す。前節までの場合も本当はゲージ変換は  $U(1) = \{z \mid |z| = 1\}$  を満たす複素数に値をもつ関数でなければならなかったが、簡単のため  $\mathbb{R}$  値関数で表されるゲージ変換に話を限定した。

と表される。前と同様に解のゲージ同値類の空間を  $\mathcal{M}$  と表し、解のモジュライ空間と呼ぶ。

多様体  $M$  が 4 次元のときは、(反) インスタントンの方程式が

$$F_A = \pm * F_A$$

で与えられる。前と同様に (反) インスタントンのモジュライ空間を  $\mathcal{M}^\pm$  と書く。前節までの可換な場合との大きな違いが二つある。一つは、可換な場合  $\mathcal{M}^\pm$  は線型空間であるが、非可換な場合は方程式の非線形性により  $\mathcal{M}^\pm$  は一般に線型空間にならないことである。線型空間にはならないが、計量を一般的に選ぶことで  $\mathcal{M}^\pm$  は多様体になることが知られている。<sup>41</sup> もう一つの違いは、可換な場合  $\mathcal{M}^\pm$  は位相不変量となり計量によらなかったが、非可換な場合は一般に計量に依存し、計量によって  $\mathcal{M}^\pm$  のトポロジーが変わりうることだ。

ドナルドソンはモジュライ空間  $\mathcal{M}^-$  を用いて、有向閉 4 次元多様体の微分位相不変量を構成した。**ドナルドソン不変量**と呼ばれている。この不変量は実際に微分構造を見分けることができる。(詳細は [3] を見よ。) 簡単のため  $\dim \mathcal{M}^- = 0$  となる場合を考える。このとき  $\mathcal{M}^-$  はいくつかの点からなる。<sup>42</sup>  $\mathcal{M}^-$  の点の個数を不変量としたいところだが、そのままでは計量に依存してしまう。そこで計量を  $g_0$  から  $g_1$  へ滑らかに変化させるとき、モジュライ空間の変化する様子を観察すると、図 3 のような状況にできることが証明できる。

$g_0$  から  $g_1$  への計量の族を  $g_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とし、計量  $g_t$  についてのモジュライ空間を  $\mathcal{M}_t$  とすると、和集合  $\mathbb{M} = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{M}_t$  は (連結とは限らない) 1 次元多様体となり  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$  はその境界である。 $t$  の変化に沿って見ると、解の増減は対消滅か対生成かのどちらかによる。したがって  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$  で点の個数の偶奇は同じで、これは微分位相不変量になる。さらに  $\mathbb{M}$ 、およびその境界  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$  に適切に向きを与えることができ、その向きに従って  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$  の点を  $+1$  または  $-1$  と数えると整数値の微分位相不変量を作ることができる。これがドナルドソン不変量である。

<sup>41</sup>但し、 $\mathcal{M}^\pm$  は特異点を持つことがある。 $M = S^4$  のとき  $SU(2)$  インスタントンのモジュライ空間  $\mathcal{M}^+$  はインスタントン数と呼ばれる数が  $-1$  のとき 5 次元球体  $B^5$  の内部と同相となる。

<sup>42</sup>可換な場合は  $\mathcal{M}^-$  は線型空間なので  $\dim \mathcal{M}^- = 0$  なら  $\mathcal{M}^-$  は常に原点 1 点のみからなる 0 次元線型空間であるが、非可換な場合は  $\mathcal{M}^-$  は複数個の点の集まり、あるいは空集合になり得る。

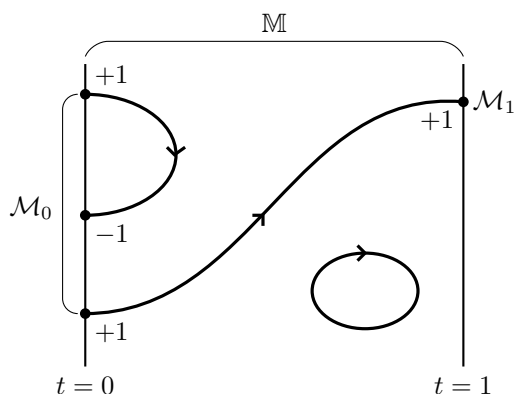


図 3:  $M$  の図

ドナルドソン不変量は exotic な微分構造を発見するのに多くの応用があった。例えば、楕円曲面と呼ばれる 4 次元多様体に対数変換や knot 手術というある種の手術を施したものが exotic な多様体になることが見出された。

## 4 おわりに

本稿でこれまで取り上げてきた事柄は 4 次元トポロジーとゲージ理論のほんの入り口に過ぎない。その後数十年の発展は目覚ましいものがあるが、ゲージ理論との関わりだけにとどまらない 4 次元トポロジーの最近までの発展に興味を持たれたなら [13] を読まれるとよい。

また近年、ここまで説明してきた 4 次元トポロジーとゲージ理論との関わりとは異なるタイプのトポロジーと物理との深い関係が見られるようになってきた。例えば、トポロジカル絶縁体の分類への位相的  $K$  理論の応用 [4] や、超対称量子場の理論 (SQFT) の位相的モジュラー形式 (tmf) による分類を目指す Segal–Stolz–Teichner プログラム [10] などがある。

トポロジーと物理、今後さらなる関係の深化と発展に期待したい。

## 参考文献

[1] Atiyah, M. F., Bott, R.: The Yang–Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. Lond., A* **308**, 523–615 (1983).

[2] Donaldson, S. K.: An application of gauge theory to four dimensional topology. *J. Differ. Geom.* **18**, 279–315 (1983).

[3] Donaldson, S. K., Kronheimer, P. B.: The geometry of four-manifolds. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Clarendon Press. ix, 440 p. (1990).

[4] 五味清紀, トポロジカル絶縁体入門—トポロジーの視点から—, 数学 **74-1**, p. 54–80 (2022).

[5] Gross, David J.: Gauge theory—past, present, and future? *Chinese Journal of Physics* **30**(7), 955–972 (1992).

[6] 橋本 義武, ゲージ理論の基礎数理, サイエンス社 (2015).

[7] Milnor, John W.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. Math. (2)* **64**, 399–405 (1956).

[8] 中村 信裕, ゲージ理論とトポロジー, 第 59 回総合科学研究会 (2023.12.22) 講演資料, <https://kansai-gauge.squares.net/misc/sougou-talk.pdf>. 参照 2025.11.10.

[9] 大槻 知忠・満洲 俊樹・亀谷 幸生, 幾何学と物理, 朝倉書店 (2023).

[10] Stolz, S., Teichner, P.: Supersymmetric field theories and generalized cohomology, *Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.* **83**, p. 279–340 (2011).

[11] 坪井 俊, 幾何学 I 多様体入門, 東京大学出版会 (2005).

[12] 坪井 俊, 幾何学 III 微分形式, 東京大学出版会 (2008).

[13] 上 正明・松本 幸夫, 4 次元多様体 I, II, 朝倉書店 (2022).

## Text mining of student feedback as a tool to improve medical education

Takachika Takimoto<sup>1</sup>, Kenneth E Nollet<sup>2,3</sup>, Aya Goto<sup>4,5\*</sup>

1. School of Medicine, Fukushima Medical University

2. Radiation Medical Science Center for the Fukushima Health Management Survey, Fukushima Global Medical Science Center

3. Department of Blood Transfusion and Transplantation Immunology, Fukushima Medical University

4. Center for Integrated Sciences and Humanities, Fukushima Medical University

5. Department of Global Health and Population, Harvard T.H. Chan School of Public Health

\*Corresponding author: Aya Goto, agoto@fmu.ac.jp

### Abstract

**Background:** As a qualitative way to evaluate the effectiveness of medical education, students may be asked to reflect and write freely about what they learned after lectures and practical training. Thereafter, teachers subjectively interpret what has been written. This process can be complemented by quantitative evaluation methods, such as text mining.

**Objective:** To explore the potential of quantitative text analysis applied to what medical students write after completing a short, small group, bedside learning rotation at Fukushima Medical University (FMU).

**Methods:** Free-text reflections, written by 129 students who rotated in groups of 6-8 through FMU's Department of Blood Transfusion and Transplantation Immunology, were manually transcribed into an Excel file and quantitatively analyzed using KH-Coder, a text analysis program.

**Results:** Text analysis revealed word choices in free-text reflections that were unique to specific genders or student groups. For example, one group used the words "earthquake," "situation," and "limited" in the context of "blood transfusion in a resource-limited situation during an earthquake," while "antibody" and "check" were specific to women and men, respectively.

**Discussion:** Frequently used words vary among student groups that rotate through the school year together, and also vary by gender. This suggests group-specific and gender-specific differences in learning that could be investigated in greater detail. Analyzing free-text student reflections with text analysis may be useful for obtaining insights to improve the curriculum in general and also tailor particular aspects of the curriculum to the needs of different students.

**Keywords:** medical education, educational assessments, text mining

Received 28 August 2025, Revised 19 October 2025, Accepted 27 October 2025

## **1. Introduction**

The evaluation of teaching effectiveness is essential for improving medical education in general and ensuring high-quality learning experiences in particular. Among various evaluation methods, student feedback collected after a course or rotation can be analyzed to assess its educational value (1). While multiple-choice surveys are commonly used due to their ease of analysis and standardization, they limit student responses to predetermined options. This limitation may hinder the discovery of valuable, unexpected insights into students' perceptions and learning experiences.

In contrast, giving students the opportunity to write free-text reflections can enable educators to capture a wide range of opinions, including unanticipated feedback that may reveal curricular strengths and areas for improvement. However, the analysis of free-text responses presents significant challenges. It is difficult to extract objective information from qualitative assessments, and the process of summarizing responses can be influenced by the analyst's own biases and thinking habits.

To address these limitations, text mining has emerged as a powerful method for analyzing qualitative data in a systematic and objective manner. KH-Coder (<https://khcoder.net>) is one such text mining tool, specifically designed for the quantitative analysis of textual data. By automatically extracting words from free-text responses and performing multivariable analyses such as correspondence analysis or co-occurrence network mapping, KH-Coder facilitates the identification of underlying patterns and trends within otherwise qualitative datasets. (2,3) Its application in educational research allows for a more rigorous and reproducible approach to interpreting open-ended student feedback (4).

This study explored the utility of text analysis in the context of medical education, particularly in the quantitative evaluation of open-ended student reflections following "bedside learning" sessions for students in years 4 and 5 of a 6-year Japanese medical curriculum. Through this analysis, we seek to demonstrate the potential of text analysis to support objective, data-driven insights into student learning and contribute to continuous improvement of educational practices.

## **2. Methods**

### **2-1. Survey participants, program, and period**

This survey was conducted among 129 fourth- and fifth-year medical students who rotated in groups of 6-8 through FMU's Department of Blood Transfusion and Transplantation Immunology during the 2022 academic year. Nominally one of the "bedside learning" (BSL) rotations that comprise much of the fourth- and fifth-year curriculum, this rotation did not involve direct patient contact during the COVID-19 pandemic.

### **2-2. Survey content**

Transfusion BSL sessions convened on Wednesdays and Thursdays of alternate weeks during the academic year, with a morning seminar, an afternoon tour of the Japanese Red Cross Fukushima Blood Center, and an afternoon laboratory experience. By the end of the session, participating students were asked to turn in a free-form assessment of their experience, with daily comments written on the front and back of a paper that included unique role-playing instructions for part of the Wednesday morning seminar. The front page invited feedback about each student's role-playing activity: "TODAY, write a self-evaluation of your performance, and some general comments about the experience." The back page prompt was more general: "On THURSDAY, please write any additional comments about this BSL rotation." In this study, role-specific front-page comments were excluded from analysis. Back-page comments, linked to gender inferred from each student's name and the BSL group to which each student belonged, were de-identified and transcribed into an Excel file. These free-form assessments were already being distributed to and collected from students prior to the design of this anonymized study, which was deemed to require no additional ethics review.

### **2-3. Course content**

During the COVID-19 pandemic, FMU's transfusion medicine rotation included scenario-based role-playing exercises in lieu of patient contact. These scenarios included interviewing an emergency blood donor volunteer and providing medical consultation to an Rh-negative woman pregnant with an Rh-positive fetus, and her partner. Medical roles included doctors in training and their professors, with all roles played by the 6-8 students in the rotation. Through these role-plays, students practiced essential communication skills and applied medical knowledge related to transfusion safety and maternal-fetal blood group incompatibility. Students were free to use Japanese and/or English when playing their roles.

### **2-4. Analytical procedure**

KH-Coder version 3 was used for analysis. The actual analytical procedure was as follows:

- (1) Obvious typographical errors in the collected questionnaires were corrected. Different ways of writing the same concept were standardized (e.g., "Rh+" and "Rh(+)" were input as "Rh+"). Responses written in Japanese were entered as they were, while those written in English were entered in English. Illegible content was excluded.
- (2) Preprocessing was performed to extract words from the text.
- (3) Three analyses were conducted: frequent word extraction, co-occurrence network analysis, and correspondence analysis.

## **3. Results**

### **3-1. Frequent word extraction**

The free-text responses from 129 students (80 male and 49 female) were analyzed to extract frequent words, categorized by language (Japanese or English) and gender (Table 1). In both groups, the most common Japanese word was 血液 (blood), appearing 63 times in male



responses and 39 times in female responses. Other frequently used Japanese words included 行う (perform), 思う (think), 考える (consider), and 自分 (self). In English responses, meaningful words such as *blood*, *type*, *learn*, and *test* were common across genders.

The colored words in Table 1 were specific to gender. In Japanese, male students more often used immunology-related terms such as 抗体 (antibody; 15 occurrences) and 抗原 (antigen; 8 occurrences), whereas female students more frequently used terms related to learning environment and opportunities, such as 機会 (opportunity; 7 occurrences), 方法 (method; 6 occurrences), and センター (center; 5 occurrences). In English, male students more frequently used words related to time and errors, such as *time*, *today*, and *mistake*, while female students more often used words related to practical experience and checking procedures, such as *check*, *experience*, *English*, and *find*.

### 3-2. Co-occurrence networks

Language-specific co-occurrence network mapping visualized the themes within the texts in Japanese and English. The Japanese co-occurrence network revealed five main clusters:

- 01 抗原抗体反応 (antigen–antibody reaction) – comprising terms such as 抗原 (antigen), 抗体 (antibody), and 反応 (reaction), representing knowledge related to immunological mechanisms and laboratory procedures in transfusion medicine;
- 02 震災という資源が限られた状況 (disaster situations with limited resources) – including 震災 (earthquake), 状況 (situation), and 限られた (limited), reflecting learning regarding medical practice under resource-constrained conditions, potentially influenced by case discussions on transfusion during disasters;
- 03 実習で得た知識や学び (knowledge and learning from practice) – encompassing 知識 (knowledge), 学ぶ (learn), and 得る (gain), indicating an emphasis on the acquisition of knowledge and skills through the practical session;
- 04 良い学びの機会 (valuable learning opportunities) – containing 機会 (opportunity), 良い (good), and 経験 (experience), representing students' recognition of the training as an important educational opportunity; and
- 05 血液型判定を自分で行った感想 (impressions from performing blood type tests) – including 血液 (blood), 行う (perform), and 自分 (self), describing reflections on the experience of personally conducting blood typing procedures.

The English co-occurrence network revealed six clusters:

- 01 Double check to avoid mistakes – incorporating *check*, *mistake*, and *outcome*, reflecting attention to accuracy and verification in laboratory practice;
- 02 Contamination causes errors – comprising *contamination*, *experiment*, and *error*, representing awareness of quality control and procedural risks;
- 03 Disaster with limited resources – including *disaster*, *resource*, and *situation*, mirroring

Japanese findings in highlighting disaster-related medical considerations;  
04 Learning about blood tests – containing *blood*, *type*, *be*, and *do*, indicating fundamental procedural learning associated with blood typing;  
05 Study and English learning – incorporating *study* and *English*, reflecting comments on both subject-specific study and language learning; and  
06 Knowledge about blood transfusion – comprising *knowledge*, *transfusion*, and *judge*, indicating conceptual understanding and decision-making in transfusion practice.

### 3-3. Correspondence analysis

The correspondence analysis revealed characteristic distributions of words across student groups. In the Japanese analysis, the first axis distinguished disaster-related terms from immunology-related terms, while the second axis separated learning environment-related words from procedural words (Figure 1). Certain student groups were positioned near disaster-related terms such as 震災 (earthquake) and 限られた (limited), whereas others were closer to immunology-related terms such as 抗体 (antibody) and 抗原 (antigen). In the English analysis, the first axis contrasted *disaster* and *resource* with *contamination* and *experiment*, while the second axis distinguished *experience* and *judge* from *check* and *mistake* (Figure 2).

## 4. Discussion and conclusion

In this study, quantitative analysis of free-text responses revealed diversity of learning content and differences among groups and between genders, suggesting possible inconsistencies in how the curriculum is conveyed and understood. Structural analysis of such textual data has recently attracted attention in the context of medical education assessment. Zhang and colleagues applied sentiment analysis and topic modeling to resident evaluation comments, demonstrating the potential of these methods to enhance the visibility and improvement of educational evaluations in clinical settings (5).

Our results show that students' free-text reflections could be categorized into a broad range of themes, including immunological knowledge, medical responses in disaster situations, practical training experiences, error prevention strategies, and evaluations of the learning environment. Differences in vocabulary use and thematic focus were observed between genders and among training groups, suggesting that even within the same curriculum, students may perceive and internalize learning content differently. This is consistent with prior findings that gender can influence how students perceive the educational environment. For example, Atwa and colleagues found that female medical students reported a more positive perception of their learning environment compared to males (6), indicating that gender-based differences in educational experience and interpretation are meaningful and may affect learning outcomes. These insights underscore the importance of tailoring instructional approaches to better meet the diverse needs of learners.

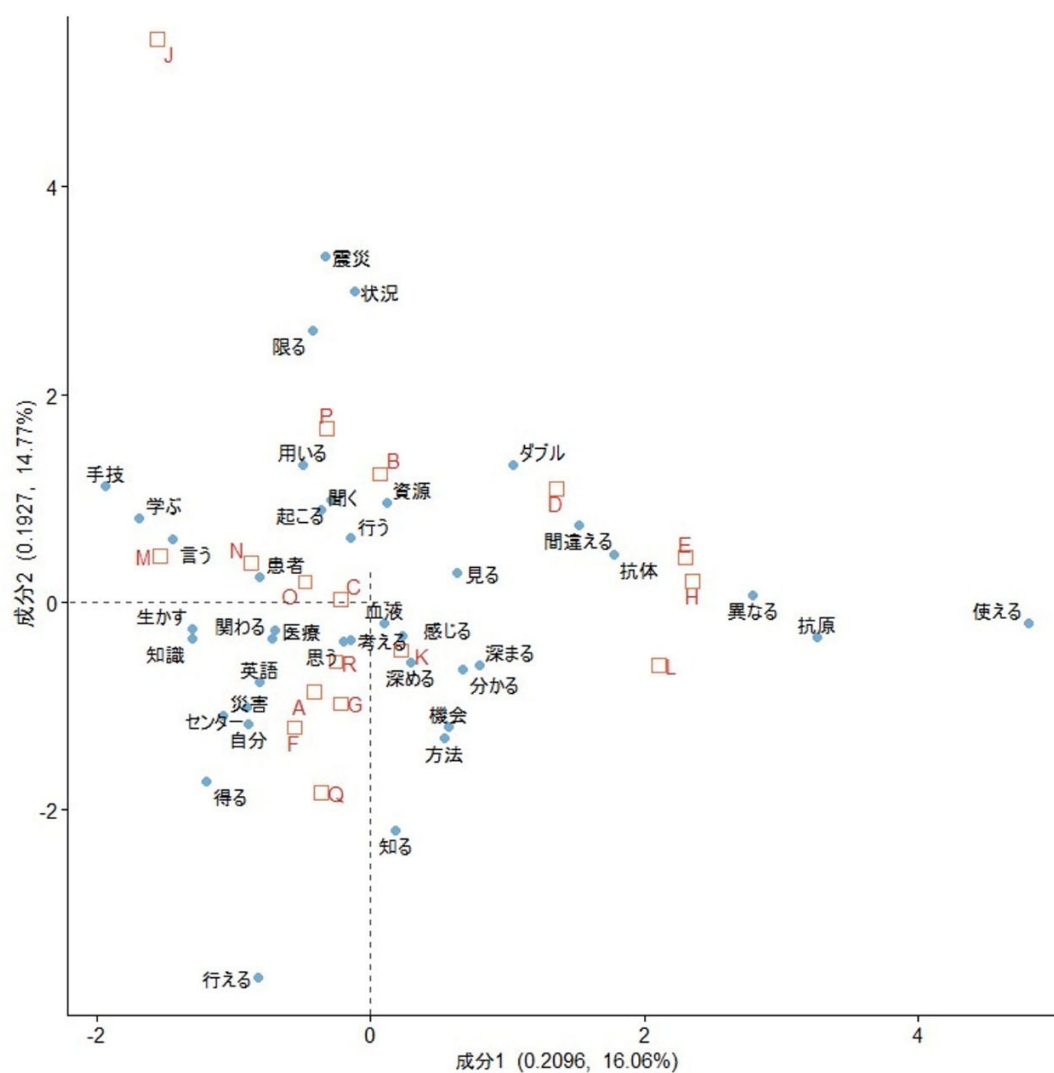
This study has certain limitations. It was conducted at a single institution and within a single academic year, which limits the generalizability of its findings. Future research would benefit from collecting multi-year data and comparing predefined learning objectives with actual learning outcomes to further validate and expand upon these findings. Another methodological point to note was that the data were analyzed in their original languages without translation either to Japanese or English. While this approach preserved the authenticity and context of each student's expression, it also limited the cross-language comparison. In addition, writing in English might have limited the in-depth expression for those whose native language was Japanese. Despite the limitations, small pilot studies, including this one, can guide the design of more definitive investigations, so that quantitative analysis of otherwise qualitative data can indeed improve medical education for diverse student cohorts.

## References

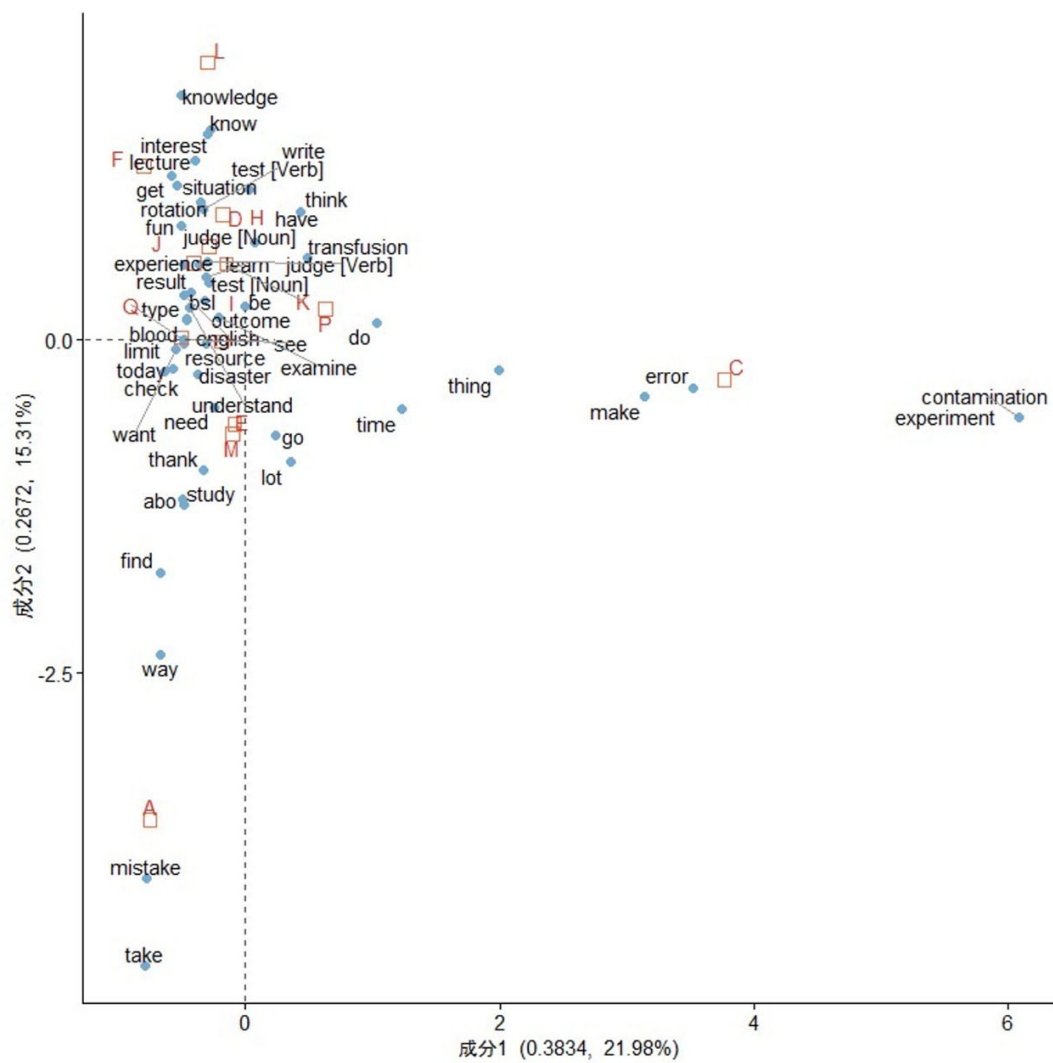
1. Baker K. Clinical teaching improves with resident evaluation and feedback. *Anesthesiology*. 2010; 113: 693-703.
2. Higuchi K. A Two-Step Approach to Quantitative Content Analysis: KH Coder Tutorial using Anne of Green Gables (Part I). *Ritsumeikan Social Sciences Review*. 2016; 52: 77-91.
3. Higuchi K. A Two-Step Approach to Quantitative Content Analysis: KH Coder Tutorial using Anne of Green Gables (Part II). *Ritsumeikan Social Sciences Review*. 2017; 53: 137-147.
4. Misuraca M, Scepi G, Spano M. Using opinion mining as an educational analytic: an integrated strategy for the analysis of students' feedback, *Studies in Educational Evaluation*. 2021; 68: 100979.
5. Zhang R, Pakhomov S, Gladding S, et al. Automated assessment of medical training evaluation text. *AMIA Annual Symposium proceedings*. 2012; 1459-1468.
6. Atwa H, Alkhadragy R, Abdelaziz A. Medical students' perception of the educational environment in a gender-segregated undergraduate program. *Journal of Medical Education*. 2020; 19: e104934.

**Table 1. Frequently used words by gender**

Male (n=80)		Female (n=49)	
Japanese (n=54)	English (n=28)	Japanese (n=39)	English (n=14)
血液 (63)	be (48)	血液 (39)	be (39)
思う (30)	blood (32)	行う (24)	blood (19)
行う (29)	type (19)	思う (21)	type (11)
自分 (18)	do (16)	考える (13)	learn (10)
抗体 (15)	learn (15)	自分 (12)	test (7)
考える (15)	test (10)	感じる (8)	check (6)
学ぶ (13)	time (10)	学ぶ (7)	do (5)
見る (12)	have (9)	機会 (7)	experience (4)
感じる (10)	today (9)	見る (6)	have (4)
分かる (9)	mistake (8)	方法 (6)	english (3)
抗原 (8)	lot (7)	センター (5)	find (3)



**Figure 1. Correspondence analysis by student groups: opinions written in Japanese**



**Figure 2. Correspondence analysis by student groups: opinions written in English**

## 総合科学研究会報告

2024年 12月 以降に開催した総合科学研究会プログラム

22

## これまでに開催した総合科学研究会プログラム

- (1) 名称 第 62 回総合科学研究会・復興に関する公開講座  
演題 原子力発電をめぐる法と政治 ―立法事実から考える―  
講師 藤野 美都子先生（福島県立医科大学 医療研究推進センター）  
日時 2025 年 1 月 22 日（水） 16:30～18:00  
方法 会場と Zoom 配信によるハイブリッド開催  
会場 福島県立医科大学光が丘キャンパス 5 号館 2 階第 8 講義室
- (2) 名称 第 63 回総合科学研究会  
演題 カント『脳病試論』をめぐる対談 ―「人格」を構成するものを基軸として―  
講師 福田 俊章 先生（倫理学：総合科学教育研究センター人文社会科学領域）  
本多 創史 先生（思想史総合科学教育研究センター人文社会科学領域）  
日時 2025 年 3 月 21 日（金）午後 4 時 00 分～午後 5 時 30 分  
方法 会場と Zoom を用いたハイブリッド開催  
会場 保健科学部 講義室 9 (福島駅前キャンパス 3 階)
- (3) 名称 第 64 回総合科学研究会・医療経済に関する公開講座  
演題 経済学的な視点から見る人口の高齢化と医療費  
講師 湯田道生先生（東北大学大学院経済学研究科 経済経営学専攻 医療福祉講座）  
日時 2025 年 10 月 8 日（水）午後 5 時 00 分～午後 6 時 30 分  
方法 Zoom を用いたハイブリッド開催  
会場 福島県立医科大学 災害医学・医療産業棟 7 階 会議室 2



# 福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要投稿規定

2012.2.29 提示  
2012.10.31 承認  
2014.10.16 一部改訂  
2023.10.30 一部改訂

## 1. 方針・趣旨

本紀要では、センターメンバーの研究活動、および、センターの活動を紹介することを主な目的とする。また、その内容は、本学の理念およびポリシーに則ったものを掲載する。

## 2. 名称及び発行

福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要  
英文名称：The Bulletin of the Center for Integrated Sciences and Humanities  
年1回、11月に発行する。

## 3. 投稿資格

- [1] 本紀要へ投稿できる者は、本学教職員および非常勤教職員であることを原則とする。
- [2] 本学教職員以外の者との共同研究については、本学教職員が共同執筆者である場合に限り、投稿を認める。
- [3] 本学の大学院学生及び大学院研究生で、編集委員会において適当と認めた者については、投稿を認める。
- [4] 依頼論文の場合は、この限りではない。

## 4. 投稿記事とその種類

記事の種類は次のとおりとする。なお、他誌との完全な二重投稿は認めない。  
ただし、総合論文等（これまでの研究論文をまとめたもの）の場合はこの限りではない。  
○原著論文  
○総説（総合論文を含む）  
○資料  
○総合科学研究会報告  
○センター活動報告詳細記事  
○書評  
○企画  
○その他（編集委員会が適当と認めたもの）

## 5. 倫理規定

人、および動物が対象である研究は、倫理的に配慮され、その旨が本文中に記載されていること。

## 6. 原稿に関すること

- [1] 使用言語：和文または欧文とする。大きさはA4判とし、電子媒体とする。
- [2] 原稿の制限：本文、図・表等を含めた刷り上がり総ページが、欧文、和文おおよそ10ページ以内とする。
- [3] 原稿の作成：本紀要に掲載済みの論文を参考に作成するか、または、所属学会等の学会誌論文等の書式に沿って作成する。ただし、提出後、必要に応じて掲載に適した書式に変更を加えることがある。また、原稿には別に表紙（別紙）をつけ、論文（記

事）の種類、別、論文題目、氏名、所属、電子メールアドレスを記す。  
[4] 原稿の提出：各年度の原稿提出の区切りは、8月31日とする。

## 7. 論文等の査読及び採否の決定

- [1] 論文については、編集委員会は1名以上の査読者に審査を学内教職員に依頼する。審査の結果、必要ならば、編集委員会は原稿の修正等を求めることができる。
- [2] 投稿論文等の採否の最終的な決定は編集委員会が行う。
- [3] 依頼論文の場合は、[1][2]の限りではない。

## 8. 校正

- [1] 校正は、著者の責任において期限内に行い、再校までで校了するように努力する。
- [2] 校正は、誤字、脱字等の訂正を原則とする。
- [3] 冊子、表紙、標題、著者名、号巻数などに関する部分は、編集委員会の責任において調整する。

## 9. 掲載の経費及び別刷りについて

- [1] 掲載に要する経費は、原則として無料とする。
- [2] 別刷りは、発行しない。

## 10. 出版権の許諾

論文を投稿する者は、総合科学教育研究センターに対し、当該論文に関する出版権の利用につき許諾するものとする。掲載が決定した論文等は、原則として電子化し、総合科学教育研究センターのホームページを通じて公開する。また、福島県立医科大学学術成果リポジトリへの参加を行う。

## 11. 投稿規定の施行

本投稿規定は、2012年4月1日に遡る。

**福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要**

The Bulletin of the Center for Integrated Sciences and Humanities

2025 年 11 月 30 日発行

発行機関 公立大学法人 福島県立医科大学 総合科学教育研究センター

〒960-1295 福島市光が丘 1

E-mail: [icsh@fmu.ac.jp](mailto:icsh@fmu.ac.jp)

Home Page: <http://www.fmu.ac.jp/home/icsh/?x=cat:1>

