ISSN 2187-3321

福島県立医科大学
総合科学教育研究センター 紀要

The Bulletin of The Center for Integrated Sciences and Humanities

FUKUSHIMA MEDICAL UNIVERSITY

Volume 4　November 2015

公立大学法人 福島県立医科大学
総合科学教育研究センター

Vol. 4, 2015

目 次

原著論文

CT における 2 種類のフィルタ関数の関係

吉田　宏

福島県立医科大学医学部自然科学講座 (数理物質科学分野)

CT 等の測定で得られる再構成像で用いられるフィルタリング処理において，数学的に等価な 2 種類のフィルタ（投影にあてるフィルタ，原画像にあてるフィルタ）の関係について調べた。これらの関係から，実用化されている既存のフィルタが原画像に対してどのようなことをしているのかを明らかにする。更に，この関係を第一原理として用いて新たなフィルタ関数を作成することができることを示す。

Received 2 October 2015, Accepted 16 October 2015

1　序章

CT 等における測定では，断面の減弱係数の 2 次元分布 $f_0(x,y)$ に対して，その Radon 変換である投影データから f_0 に近い 2 次元分布 $f(x,y)$ を求めることで，断面を可視化する。この処理において，通常用いられている単純な方法が「フィルタ補正逆投影法 (FBP)」である。この方法は，様々な方向から撮られた投影にフィルタをあて，その逆投影をとるという演算で断層画像を求めるものである。ここで,「フィルタをあてる」という演算は，元の関数（投影）とフィルタ関数との合成積をとることに相当している。2 つの関数の合成積の Fourier 変換はそれぞれの Fourier 変換の積に等しいことから，この演算は通常周波数空間上で行われることが多く，実際に用いられているフィルタ関数も周波数空間上で導入される場合が多い (例えば，Bracewell & Riddle, 1967[(1)]; Ramachangran & Lakshminarayanan, 1971; Shepp & Logan, 1974)。

ところで，これらのフィルタは如何にして導入されたのか自明ではない。そのため，これらのフィルタを参考として新たなフィルタを考案する事が困難な状況である。そこで，本レポートでは，既存のフィルタが如何にして導入されたのかを f_0 と f の関係から調べ，この関係から新たにフィルタ関数を導入する際の第一原理を提案する。更に，この原理に基づいた新たなフィルタを提案する。

本レポートの構成は以下の通りである。まず，フィルタ補正逆投影法に関する一般論について簡単にレビュー (§2) した後，f_0 と f の関係について調べ，既存フィルタに対する考察からフィルタ関数を導入する第一原理を提案する (§3)。更に，その第一原理に基づいて，FBP で使える新たなフィルタ関数を提案し，その性能を評価する (§4)。

2　一般論

CT で得られる断層画像（デジタル画像）は，一般に縦横 $N \times M$ に等分割されたピクセルに，画像の濃淡を表す数値が割り当てられている。この 2 次元的な数値の分布（2 変数関数 $f(x_i, y_j)$）が断層面内の減弱係数に対応している。しかし，実際に得られる画像 $f(x_i, y_j)$ は真の断層画像（以下ではこれを「原画像」と呼びその分布関数を f_0 で表す）ではなく，原画像に何らかのフィルタリングを行った画像である。以下では f，f_0 を 2 次元の連続関数であるとし，投影は平行ビームによるものとする。

2.1　投影と逆投影法

x 軸に対して θ 傾いた軸（s 軸）に垂直な軸 (u 軸) に平行で u 軸から s 離れている直線 $x\cos\theta + y\sin\theta = s$ に沿って $f_0(x,y)$ を積分したものを投影 $p(s,\theta)$ といい，これは次のように定義される：

$$p(s,\theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (1)$$

ここで $\delta(x)$ はデルタ関数 (§§A.1 参照) である。この $f_0(x,y)$ から $p(s,\theta)$ の変換が Radon 変換である。

また，特定の点 (x,y) を通る全ての直線に沿って得られた投影を重ね合わせることを逆投影といい，この方法で得られる像を逆投影像という：

$$b(x,y) = \int_0^{\pi} p(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\mathrm{d}\theta. \quad (2)$$

この式に式 (1) を代入すると，

$$b(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x-x', y-y')\frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad (3)$$

[(1)] Bracewell & Riddle では，電波望遠鏡による観測データから天体の 2 次元マップを再構成する際に FBP が用いられている。

となる。これより，逆投影は原画像と $1/r(=1/\sqrt{x^2+y^2})$ の合成積であること，即ち，原画像に $1/r$ のフィルタをあてたものであることがわかる。式 (3) は，$b(x,y)$ が (x,y) 以外の点の値も距離に逆比例した重みを付けて全て正の値で取り込んでいることを示している。これより逆投影像は原画像に対してボケた画像となる。このボケを解消するため，フィルタ補正した投影に逆投影する方法が提案されている。これがフィルタ補正逆投影法である。

2.2　投影定理とフィルタ補正逆投影法

原画像 $f_0(x,y)$ の 2 次元 Fourier 変換を $F_0(Q_x,Q_y)$ とする。周波数空間の座標 (Q_x,Q_y) を極座標 $(Q_x = Q\cos\theta, Q_y = Q\sin\theta)$ で表すと，F_0 は式 (1)，(A.8) より，

$$\begin{aligned}&F_0(Q\cos\theta, Q\sin\theta)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-s)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]e^{-\mathrm{i}2\pi Qs}\mathrm{d}s\\&=\int_{-\infty}^{\infty} p(s,\theta)e^{-\mathrm{i}2\pi Qs}\mathrm{d}s \equiv P(Q,\theta) \qquad (4)\end{aligned}$$

と表せる[2]。ここで，$P(Q,\theta)$ は $p(s,\theta)$ の s についての 1 次元 Fourier 変換である。これが所謂「投影定理」で，周波数空間において，原点をとおり Q_x 軸に対して θ だけ傾いた直線を含み Q_x-Q_y 平面に垂直な平面による $F_0(Q_x,Q_y)$ の断面は，実空間において x 軸に対して θ 傾いている s 軸に垂直な方向に $f_0(x,y)$ を投影したもの $(p(s,\theta))$ の s に関する 1 次元 Fourier 変換に等しいことを示している。

上式の $F_0(Q_x,Q_y) = P(Q,\theta)$ を逆 Fourier 変換することで原画像が得られる：

$$f_0(x,y) = \int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |Q|P(Q,\theta)e^{\mathrm{i}2\pi Q(x\cos\theta+y\sin\theta)}\mathrm{d}Q\right]\mathrm{d}\theta. \qquad (5)$$

ここで，

$$q_0(s,\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |Q|P(Q,\theta)e^{\mathrm{i}2\pi Qs}\mathrm{d}Q, \qquad (6)$$

$$h_0(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |Q|e^{\mathrm{i}2\pi Qs}\mathrm{d}Q \qquad (7)$$

と形式的におくと，q_0 は投影とフィルタ h_0 との合成積

$$q_0(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s',\theta)h_0(s-s')\mathrm{d}s' \qquad (8)$$

の形をしている。このように，フィルタ関数との合成積をとる演算が「フィルタをあてる」ことに相当している。

さて，式 (5) は，「$q_0(s,\theta)$ の逆投影が原画像となる」ことを示している。従って，フィルタ関数 h_0，またその Fourier 変換 $H_0(Q)(=|Q|)$ は，投影データから原画像そのものを再現することのできる「究極のフィルタ」である。しかし，式 (7) は発散してしまうので，実際にはこのフィルタは存在しない。従って，式 (8) のように，$p(s,\theta)$ と $h_0(s)$ の合成積として $q_0(s,\theta)$ を求めることはできない。しかし，この式は，ある極限で h_0 と等しいフィルタが与えられれば，q_0 に近い補正値が得られ，その結果，原画像に近い再構成像 $f(x,y)$ が得られることを示唆している。事実，投影データから断層画像を求めるために，幾つかの実用的なフィルタ h が提案され使用されている。

2.3　既存のフィルタ

ここでは実際に使われているフィルタと究極のフィルタ $H_0(Q)$ と比較する。

2.3.1　Ram–Lak フィルタ

Ramachangran & Lakshminarayanan (1971) は $H_0(Q)$ の高周波数部分をカットオフする方法を提案している。これは Ram–Lak フィルタと呼ばれるフィルタで，カットオフ周波数を $Q_{\max}$ とすると，

$$H_{\mathrm{RL}}(Q) = \begin{cases} |Q| & (|Q| < Q_{\max}) \\ 0 & (|Q| > Q_{\max}) \end{cases} \qquad (9)$$

のように与えられる。逆 Fourier 変換によって実空間でのフィルタ $h_{\mathrm{RL}}(s)$ は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}h_{\mathrm{RL}}(s) &= -\frac{1-2\pi Q_{\max}s\sin(2\pi Q_{\max}s)-\cos(2\pi Q_{\max}s)}{2\pi^2 s^2}\\&= -\frac{1-\pi(s/\Delta s)\sin(\pi s/\Delta s)-\cos(\pi s/\Delta s)}{2\pi^2 s^2}. \qquad (10)\end{aligned}$$

ここで，投影のサンプリング間隔を Δs とし，カットオフ周波数 $Q_{\max}$ をナイキスト周波数 $1/2\Delta s$ とした。これより，実空間での離散化したフィルタは $s = n\Delta s$ (n は整数) として，

$$h_{\mathrm{RL},n} \equiv h_{\mathrm{RL}}(n\Delta s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\Delta s^2} & (n=0) \\ -\dfrac{1-(-1)^n}{2\pi^2 n^2\Delta s^2} & (n \neq 0) \end{cases} \qquad (11)$$

と表される。

2.3.2　Shepp–Logan フィルタ

また，Ram–Lak フィルタに似たものとして，Shepp–Logan フィルタがある (Shepp & Logan, 1974)。これは，

$$H_{\mathrm{SL}}(Q) = \begin{cases} \dfrac{2Q_{\max}}{\pi}\left|\sin\left(\dfrac{\pi Q}{2Q_{\max}}\right)\right| & (|Q| \le Q_{\max}) \\ 0 & (|Q| > Q_{\max}) \end{cases} \qquad (12)$$

で与えられる。式 (9) と比較すると，H_{SL} は H_{RL} と sinc 関数[3]との積の形をしていることがわかる。これは，H_0 と

---

[2] 周波数空間の座標 Q_x, Q_y を極座標で表すとき，$Q \ge 0$ で $-\pi \le \theta < \pi$ である。しかし，投影 $p(s,\theta)$ の場合，$p(s,\theta)$ の定義域は $-\infty < s < \infty$. $0 \le \theta < \pi$ なので，これに合わせて，投影の Fourier 変換 $P(Q,\theta)$ の定義域も $-\infty < Q < \infty, 0 \le \theta < \pi$ とする。このように，変数の定義域を定義しなおしても投影定理の意味は変わらない。

[3] sinc 関数とは文献によって定義が異なる。ここでは $\mathrm{sinc}(x) \equiv \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ と定義する。

sinc 関数との積を $Q_{\max}$ でカットオフしたものと見ることもできる。また，実空間での Shepp-Logan フィルタは次のように与えられる：

$$h_{\mathrm{SL}}(s) = \frac{2}{\pi^2 \Delta s^2}\left[\frac{1-2(s/\Delta s)\sin(\pi s/\Delta s)}{1-(2s/\Delta s)^2}\right]. \tag{13}$$

これを式 (11) と同様に離散化すると次のようになる:

$$h_{\mathrm{SL},n} \equiv h_{\mathrm{SL}}(n\Delta s) = \frac{2}{\pi^2 \Delta s^2 (1-4n^2)}. \tag{14}$$

2.3.3 Kak–Slaney フィルタ

Kak & Slaney (1987) には,

$$H_{\mathrm{KS}}(Q) = |Q| e^{-\epsilon |Q|}, \tag{15}$$

がフィルタの 1 つ例として記されている。このフィルタは，Ram-Lak や Shepp-Logan のようにカットオフで H_0 を正則化するのではなく，指数関数的に減衰する関数をかけることによって $H_0(Q)$ の高周波数部分を正則化するフィルタである。実空間でのフィルタ $h_{\mathrm{KS}}(s)$ は次のように表すことができる：

$$h_{\mathrm{KS}}(s) = \frac{2\left(\epsilon^2 - 4\pi^2 s^2\right)}{\left(\epsilon^2 + 4\pi^2 s^2\right)^2}. \tag{16}$$

ここで，ϵ は r と同じ次元を持つ任意のパラメータである。

2.3.4 3 つのフィルタから

上の 3 つのフィルタに共通するのは，どのフィルタも H_0 をもとに考えられている点である。実際 $H_{\mathrm{RL}}(Q)$ は $Q_{\max} \to \infty$ $(\Delta s \to 0)$ の極限で $H_0(Q)$ となる。また，$H_{\mathrm{SL}}(Q)$ は，この極限で $Q/Q_{\max} \to 0$，このとき $\mathrm{sinc}(Q/2Q_{\max}) \to 1$ となることから，$H_{\mathrm{SL}}(Q) \to H_0(Q)$ である。一方，Kak-Slaney フィルタでは，$\epsilon \to 0$ の極限で $H_{\mathrm{KS}}(Q) \to H_0(Q)$ となる。

どの場合の $H(Q)$ も，ある極限を取ったとき究極のフィルタ H_0 になり，更にその逆 Fourier 変換 h が収束するように作られている。これは，新たなフィルタを作成するときに，実空間におけるフィルタが有限（正則）で，そのフーリエ変換がある極限で $H_0(Q)$ となるようなフィルタを考えれば良いことを示している。

3 p-フィルタと f_0-フィルタ

前節で述べたように，実際に使用されているフィルタは，周波数空間において，ある極限で究極のフィルタ $H_0(Q)$ となり，実空間でも有限な値を持つ関数であることがわかった。 このようなフィルタを使って補正した投影を逆投影することで，原画像に近い画像を再構成する方法が「フィルタ補正再構成法」[(4)] である。

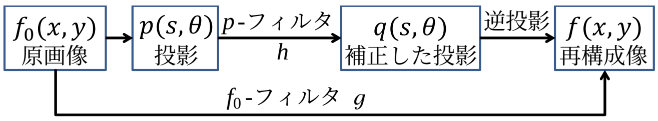


図 1 フィルタ補正逆投影法の概念図

この一連の流れは図 1 のような概念図で表せる。この図から，再構成像 f は原画像 f_0 にフィルタをあてたものとも見ることができる。この関係は次のように表せる：

$$f(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x',y') g(x-x', y-y') \mathrm{d}x' \mathrm{d}y'. \tag{17}$$

前節までは，投影にあてるフィルタのみを議論してきたが，図 1 からも明らかなように，原画像から再構成像を生成する際に，「原画像に直接あてるフィルタ」という別種のフィルタを定義することができる。従って以下では，投影にあてるフィルタを「p-フィルタ」，原画像にあてるフィルタを「f_0-フィルタ」と分けて呼ぶこととする。この節ではこの 2 種類のフィルタの関係を調べる。

3.1 p-フィルタから f_0-フィルタへの変換

p-フィルタを $h(s)$ とすると，これでフィルタ補正した投影 $q(s,\theta)$ は次のように与えられる：

$$q(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s',\theta) h(s-s') \mathrm{d}s'. \tag{18}$$

また，これを使って得られる再構成像 f は

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} q(x\cos\theta + y\cos\theta, \theta) \mathrm{d}\theta \tag{19}$$

である。式 (1)，(18) を上式に代入すると

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(s'\cos\theta - u'\sin\theta, s'\sin\theta + u'\cos\theta) \times h(x\cos\theta + y\sin\theta - s') \mathrm{d}u' \mathrm{d}s' \mathrm{d}\theta$$

となり，$s' = (x-x')\cos\theta + (y-y')\sin\theta$, $u' = -(x-x')\sin\theta + (y-y')\cos\theta$ とおくと，

$$f(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x-x', y-y') \times \left[\int_0^{\pi} h(x'\cos\theta + y'\sin\theta) \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \tag{20}$$

が得られる。式 (17) と比較すると，式 (20) の [ ] が f_0-フィルタであることがわかる。従って，p-フィルタと f_0-フィルタの間の関係

$$g(x,y) \equiv \int_0^{\pi} h(x\cos\theta + y\sin\theta) \mathrm{d}\theta \tag{21}$$

[(4)] 通常「フィルタ補正再構成法」は Fourier 変換を使って周波数空間上でフィルタ補正する方法を指すが，これは実空間での投影とフィルタ関数との合成積で得られる方法「コンボリューション再構成法」と等価である。従って，ここではどちらも「フィルタ補正再構成法」と呼ぶこととする。

が得られる。これは，g が h の逆投影であることを示している。更に，h が偶関数であれば[5]，g は次のように書き直すことができる：

$$g(x,y) = \tilde{g}(r) = \int_{-r}^{r} \frac{h(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2 - s^2}} \tag{22}$$

ここで，$\tilde{g}$ は $r(=\sqrt{x^2+y^2})$ のみの関数[6]，即ち，軸（回転）対称な関数となることがわかる。

以上より，式 (21) や (22) を使うと，p-フィルタから f_0-フィルタへの変換が可能となる。

3.2 f_0-フィルタから p-フィルタへの変換

$g(x,y)$ が与えられたとき $h(s)$ はどのように与えられるのだろうか。ここでは g から h への変換について考える。このため，$g(x,y)$, $h(s)$ の空間周波数に対する Fourier 変換を次のように定義する：

$$G(Q_x, Q_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)e^{-\mathrm{i}2\pi(Q_x x + Q_y y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{23}$$
$$H(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-\mathrm{i}2\pi Q s}\mathrm{d}s \tag{24}$$

式 (21) の両辺を Fourier 変換すると，$H(Q)$ と $G(Q_x, Q_y)$ の間に次のような関係が得られる (§§B.2 参照)：

$$H(Q) = |Q|\tilde{G}(Q) \qquad (-\infty < Q < \infty), \tag{25}$$

ここで，$\tilde{G}(Q) = G(Q\cos\theta, Q\sin\theta)$ とした。g を回転対称な関数とすると，$G(Q\cos\theta, Q\sin\theta)$ も回転対称な関数となり，$\tilde{G}(Q) = G(Q,0) = G(0,Q) = \tilde{G}(-Q)$ という性質を持つ。

式 (25) を逆 Fourier 変換することで，g から h を次のように求めることができる (§§B.3 参照)：

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\tilde{g}(0) & (s=0) \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\displaystyle\int_0^s \frac{r\tilde{g}(r)\mathrm{d}r}{\sqrt{s^2-r^2}}\right] & (s \neq 0). \end{cases} \tag{26}$$

ここで，$s=0$ のときの関係は，式 (21) から $x=y=0$ とすると $\tilde{g}(0) = \pi h(0)$ の関係があることからも確認できる。従って，式 (25) や (26) を使うことで，f_0-フィルタからp-フィルタを求めることができる。

3.3 f_0-フィルタの例

ここでは，§§2.3 で扱ったフィルタ（p-フィルタ）に対して f_0-フィルタを求め，それぞれのフィルタが原画像にどのようなことをしているのかを調べる。

[5] 実際に用いられているフィルタ関数ではこの条件は満たされている。
[6] $g(x,y)$ が回転対称な関数であるとき，これを $\tilde{g}(r)$ と記す。
[7] $[\cdots\circ\cdots]_{\mathrm{2D}}$ の「2D」は 2 変数の合成積である (§§§A.2.2 参照)。

3.3.1 逆投影について

実用化されているフィルタについて論ずる前に，まず逆投影に関して，p-フィルタと f_0-フィルタの関係について調べる。式 (3)，即ち $b = [f_0 \circ (1/r)]_{\mathrm{2D}}$[7]から，逆投影での f_0-フィルタは $1/r$ である。この 2 次元 Fourier 変換は $1/\sqrt{Q_x^2+Q_y^2} = 1/|Q|$ である。式 (25) の関係から，$\tilde{g}(r)$, $\tilde{G}(Q)$，$H(Q)$，$h(s)$ は表 1 のとおりである。

表 1. 逆投影法における p-フィルタ，f_0-フィルタ

$g(x,y)$	$\tilde{G}(Q)$	$H(Q)$	$h(s)$
$\dfrac{1}{r}$	$\dfrac{1}{\lvert Q\rvert}$	1	$\delta(s)$

p-フィルタがデルタ関数なので，逆投影の場合ではフィルタ補正した投影 $q(s,\theta)$ は $p(s,\theta)$ そのもの，即ち，補正なしの投影であることがわかる。この逆投影の例は，原画像に $1/r$ のフィルタをあてて得られる画像が投影を補正なしで逆投影した再構成像と同じである，という良く知られた関係を示しているにすぎないが，2 種類のフィルタ間のより一般的な関係から説明できるという意味で興味深い例である。

3.3.2 Ram-Lak フィルタ

次に，Ram-Lak フィルタについて考える。この周波数空間での p-フィルタは式 (9) で与えられることから，$\tilde{G}_{\mathrm{RL}}(Q) = \Theta(Q_{\max} - |Q|)$ である。これより，式 (25) を使って $g_{\mathrm{RL}}(r)$ を求めると，

$$\tilde{g}_{\mathrm{RL}}(r) = 2\pi\int_0^{Q_{\max}} QJ_0(2\pi rQ)\mathrm{d}Q = \frac{Q_m}{r}J_1(2\pi Q_{\mathrm{m}} r). \tag{27}$$

が得られる (Bracewell & Riddle)。ここで $J_0(x)$, $J_1(x)$ はそれぞれ第 1 種 0 次，1 次の Bessel 関数 (§C 参照) である。$J_1(x)$ は 1 に比べて充分大きな x に対して $\cos(x+\alpha)/\sqrt{\pi x}$ のように減衰する関数である。従って，$\tilde{g}_{\mathrm{RL}}(r)$ は正負の値を取りながら $r^{-3/2}$ のように振る舞うことで，逆投影法のボケが解消されると考えることができる。図 2(a) は $\tilde{g}_{\mathrm{RL}}(r)$ を数値的に示した図である。

3.3.3 Shepp-Logan フィルタ

周波数空間における Shepp-Logan フィルタ (12) から，これに対応する周波数空間における f_0-フィルタ $G_{\mathrm{SL}}(Q_x, Q_y) = \tilde{G}_{\mathrm{SL}}(Q)$ は (25) から，

$$\tilde{G}_{\mathrm{SL}}(Q) = \begin{cases} \left|\mathrm{sinc}\left(\dfrac{Q}{2Q_{\max}}\right)\right| & (|Q| \le Q_{\max}) \\ 0 & (|Q| > Q_{\max}) \end{cases} \tag{28}$$

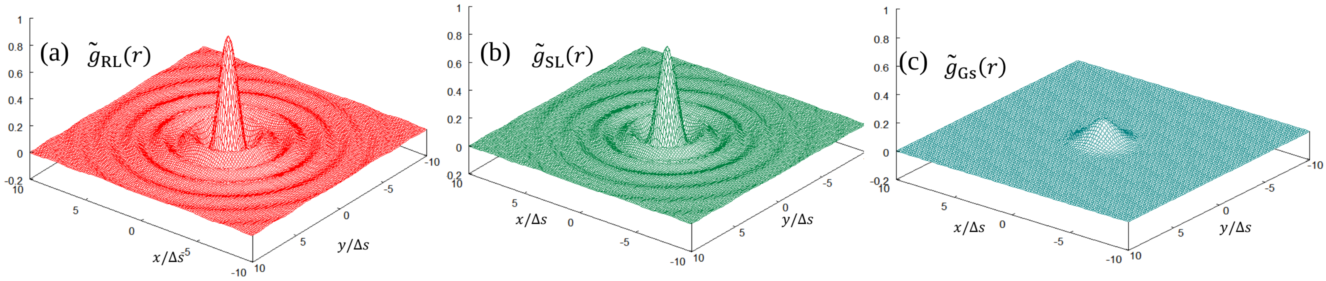


図 2. f_0-フィルタ

である。これより，実空間における f_0-フィルタ $\tilde{g}_{\mathrm{SL}}(r)$ は

$$\tilde{g}_{\mathrm{SL}}(r) = 4Q_{\max}\int_0^{Q_{\max}} \sin\left(\frac{\pi Q}{2Q_{\max}}\right) J_0(2\pi r Q)\mathrm{d}Q, \qquad (29)$$

と表される。これは，これ以上具体的な関数として表すことができないので，図 2(b) に $\tilde{g}_{\mathrm{RL}}(r)$ を数値的に示した。この図から $\tilde{g}_{\mathrm{SL}}$ は，$\tilde{g}_{\mathrm{RL}}$ と同じように，振動しながら r とともに速やかに減少していくのがわかる。

3.3.4 Kak-Slaney フィルタ

次に，Kak-Slaney の場合について考える。ここで，式 (25) から，この逆 Fourier 変換 $\tilde{g}_{\mathrm{KS}}(r)$ は式 (C.6) を使って次のように表せる：

$$\tilde{g}_{\mathrm{KS}}(r) = \frac{2\pi\epsilon}{\left\{(2\pi r)^2 + \epsilon^2\right\}^{3/2}}. \qquad (30)$$

この式は，式 (16) を式 (21) に代入することからも確認できる。この式から，$\tilde{g}_{\mathrm{KS}}(r)$ は $1/r$ 程緩やかではないが，(x, y) での画像を求めるときに，(x, y) 以外の全ての点から，全て正の値の寄与を取り込んでしまうため，Ram-Lak や Shepp-Logan フィルタほど画像のボケを取り除くことはできない。

3.3.5 3 つのフィルタの共通点

最後に，ここに例として挙げた 3 つのフィルタ $g_{\mathrm{RL}}(x, y)$，$g_{\mathrm{SL}}(x, y)$，$g_{\mathrm{KS}}(x, y)$ の共通点について述べる。前節でこの 3 つのフィルタの共通点を論じたとき，Ram-Lak や Shepp-Logan フィルタではカットオフ周波数 $Q_{\max}$ の ∞ の極限を取ったとき，Kak-Slaney フィルタでは ϵ が 0 の極限を考えたとき，対応する p-フィルタは究極のフィルタ $h_0(s)$ となることがわかった。そこで，f_0-フィルタに対しても，それぞれ同様の極限を考えたとき各 f_0-フィルタがどのような関数になるのかを調べる。

まず，Ram-Lak フィルタ (27) において，$Q_{\max} \to \infty$ の極限を考える。$\tilde{g}_{\mathrm{RL}}(r)$ は式 (27) の最終結果を求める 1 つ前の段階で $Q_{\max} \to \infty$ を考えれば，式 (C.9) から，$g_{\mathrm{RL}}(x, y) \to \delta^{(2)}(x, y)$ となることがわかる。

また，Shepp-Logan フィルタ (29) は，

$$\tilde{g}_{\mathrm{SL}}(r) = \int_0^{Q_{\max}} 2\pi Q \,\mathrm{sinc}\,(Q/2Q_{\max})\, J_0(2\pi r Q)\mathrm{d}Q,$$

と表せる。$Q_{\max} \to \infty$ の極限で上の被積分関数内の $\mathrm{sinc}(Q/2Q_{\max})$ が 1 となることから，上式はこの極限で，

$$\tilde{g}_{\mathrm{SL}}(r) \to \int_0^{\infty} 2\pi Q J_0(2\pi r Q)\mathrm{d}Q = \delta^{(2)}(x, y),$$

となることがわかる。

更に，Kak-Slaney フィルタ (30) において，$\epsilon \to 0$ の極限を考える。$\tilde{g}_{\mathrm{KS}}(r)$ において，$\left\{(2\pi r)^2 + \epsilon^2\right\}^{3/2} \doteqdot 2\pi r[(2\pi r)^2 + \epsilon^2]$ と近似し，更に，$\epsilon/2\pi = \varepsilon$ とすると，

$$\tilde{g}_{\mathrm{KS}}(r) \doteqdot \frac{1}{2\pi r}\frac{\varepsilon}{r^2 + \varepsilon^2}$$

と近似できる。デルタ関数は式 (A.3) と表現することができるので，$g_{\mathrm{KS}}(x, y) = \tilde{g}_{\mathrm{KS}}(r) \to \delta(r)/2\pi r = \delta^{(2)}(x, y)$ となることがわかる。

以上より，この 3 つのフィルタについて，ある極限を取ったとき f_0-フィルタはどの場合も $\delta^{(2)}(x, y)$ となることがわかった。これは，究極の p-フィルタ $h_0(s)$ に対応する f_0-フィルタが実は 2 次元のデルタ関数 $\delta^{(2)}(x, y)$ であることを示している。従って，f_0-フィルタとしてある極限で 2 次元のデルタ関数となる関数 $g(x, y)$ を求め，それより式 (25) や (26) を使って $H(Q)$ や $h(s)$ を求めれば，新なフィルタ (p-フィルタ) を考案することができる。これを，p-フィルタを作る際の第一原理とすれば良い。

「再構成される画像が原画像に近い画像」という要請を取り除くことで，この第一原理は次のように拡張できる：

> 「原画像に対して行いたい演算を実現する f_0-フィルタが得られれば，式 (25) や (26) を使って p-フィルタを求めることができる。」

具体的には次節で扱う「エッジフィルタ」がその例である。ただし，現在のところ f_0-フィルタが回転対称な関数の場合に限定される。これは，p-フィルタが偶関数であることと対応している。

4 第一原理に基づいた新たなフィルタ

ここでは，前節で得られた第一原理に基づいて p-フィルタを求める。

4.1　Gauss 型フィルタ

デルタ関数は通常の関数ではないので，§A.1 で示したようにいくつもの表現がある。その多くは通常の関数に対してある極限をとることによって定義される。ここでは，その 1 つの表現として式 (A.2) の Gauss 関数を使って，p-フィルタ（以下ではこれを「Gauss 型フィルタ」と呼ぶ）を求める。

2 次元の Gauss 関数は

$$g_{\mathrm{Gs}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\epsilon^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\epsilon^2}\right) = \frac{1}{2\pi\epsilon^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\epsilon^2}\right), \quad (31)$$

である (図 2(c) 参照)。ここで，ϵ は x, y と同じ次元をもつ任意のパラメータで，これが小さいほどデルタ関数の良い近似となる。$g_{\mathrm{Gs}}(x,y)$ は，理論上は点データとして期待される測定値が測定機器の問題でその点を中心にガウス分布的に広がって観測される状況を表現するときに用いられるフィルタで point spread 関数 (PSF) とも呼ばれている (Yoshii, 1993)。

$\tilde{g}_{\mathrm{Gs}}(r)$ を式 (26) に代入すると，Gauss 型の p-フィルタは次のように得られる：

$$h_{\mathrm{Gs}}(s) = \frac{1}{2\pi^2\epsilon^2}\left[1 - \frac{s}{\epsilon^2}\int_0^s \exp\left(-\frac{s^2-t^2}{2\epsilon^2}\right)\mathrm{d}t\right]. \quad (32)$$

4.2　エッジフィルタ

画像処理の分野では画像に $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ (Laplacian) を作用することで，画像のエッジを強調できることが知られている。そこで，ここではフィルタ補正逆投影法で再構成された画像 $f(x,y)$ のエッジを強調する p-フィルタ $h_{\partial^2}(s)$ を求める。まず，$h_{\partial^2}(s)$ に対応する f_0-フィルタを $g_{\partial^2}(x,y)$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\epsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x',y')\epsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g(x-x', y-y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f_0(x',y') g_{\partial^2}(x-x', y-y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',
\end{aligned}$$

この関係から

$$g_{\partial^2} = \epsilon^2 \Delta g, \quad (33)$$

の関係が得られる。ここで，ϵ は実空間における長さの次元をもつ量である。例えば，画像を再構成する際の画素のサイズ Δs に相当する。

上の関係 (33) から，$g_{\partial^2}(x,y)$ の Fourier 変換を $G_{\partial^2}(Q\cos\theta, Q\sin\theta) = \tilde{G}_{\partial^2}(Q)$ とすると，$\tilde{G}_{\partial^2}(Q) = -4\pi^2\epsilon^2 Q^2 \tilde{G}(Q)$ であることから，式 (25) の関係を使って，$H_{\partial^2}(Q) = -4\pi^2\epsilon^2 |Q^3| \tilde{G}(Q)$ と周波数空間でのエッジフィルタが得られる。これより，実空間のエッジフィルタは次のように得られる：

$$h_{\partial^2}(s) = \epsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} h(s). \quad (34)$$

このフィルタは，p-フィルタに依存する。式 (32) と (33) で ϵ を同じものとすると，h_{Gs} に対するエッジフィルタは以下のように得られる：

$$h_{\mathrm{Gs}\partial^2}(s) = \epsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} h_{\mathrm{Gs}}(s) = \frac{1}{2\pi^2\epsilon^2} - \left(3 - \frac{s^2}{\epsilon^2}\right) h_{\mathrm{Gs}}(s). \quad (35)$$

4.3　Gauss 型フィルタの評価

次に，実際の画像を通して Ram-Lak, Shepp-Logan のフィルタと比較しなが新たに作成した Gauss 型フィルタがどの程度性能の良いフィルタなのかを調べる。

4.3.1　ファントムヘッドによるフィルタの評価

まず比較するのは，Shepp & Logan (1974) で使われているファントムヘッドの画像で比較する。

図 3 はファントムヘッドをある角度における投影を示したものである。図 3.(a) は補正なしの投影 $p(s,\theta)$，(b) は Ram-Lak フィルタで補正した投影 $q_{\mathrm{RL}}(s,\theta)$，(c) は Shepp-Logan フィルタで補正した投影 $q_{\mathrm{SL}}(s,\theta)$，(d) は Gauss 型フィルタで補正した投影 $q_{\mathrm{Gs}}(s,\theta)$，(e) は Gauss 型フィルタのエッジフィルタ (35) で補正した投影 $q_{\mathrm{Gs}\partial^2}(s,\theta)$，(f) は Gauss 型フィルタとそのエッジフィルタを合わせたフィルタで補正した投影 $q_{\mathrm{Gs+Gs}\partial^2}(s,\theta)$ である。これより，Gauss 型フィルタで補正した投影は，Ram-Lak や Shepp-Logan と比較するとシャープさの点で劣る。同じことは，f_0-フィルタを示した図 2 の比較からもうかがえる。これは，前述のとおり，Gauss 型フィルタは点データが Gauss 分布的に広

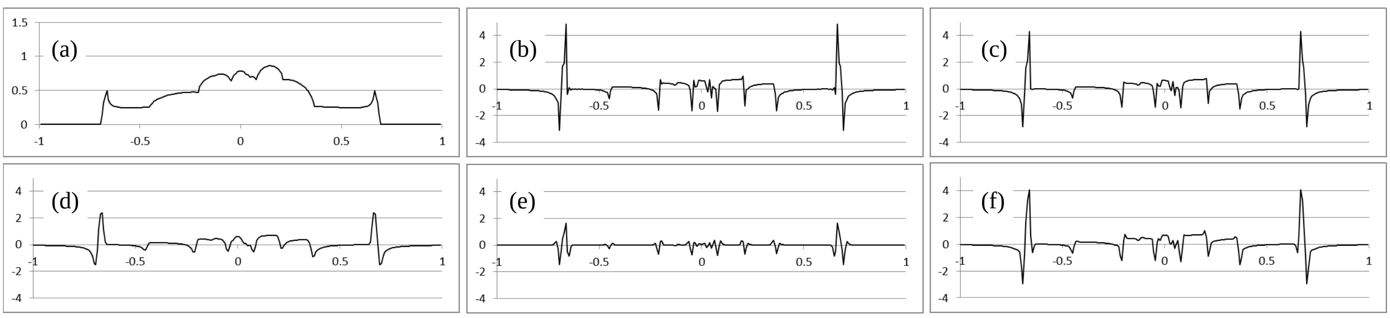
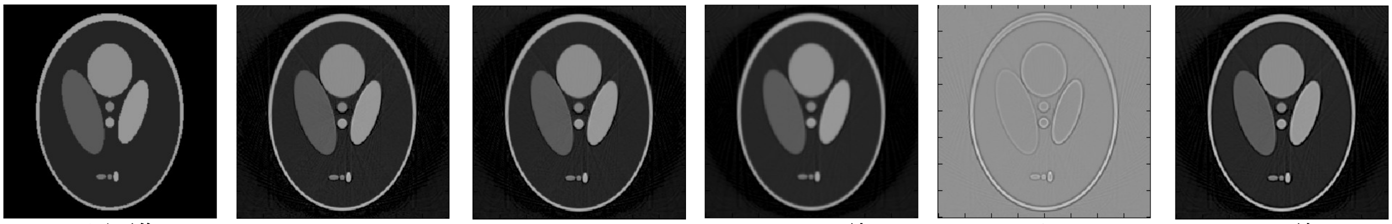


図 3. フィルタ補正した投影：(a) $p(s,\theta)$, (b) $q_{\mathrm{RL}}(s,\theta)$, (c) $q_{\mathrm{SL}}(s,\theta)$, (d) $q_{\mathrm{Gs}}(s,\theta)$, (e) $q_{\mathrm{Gs}\partial^2}(s,\theta)$, (f) $q_{\mathrm{Gs\,+\,Gs}\partial^2}(s,\theta)$

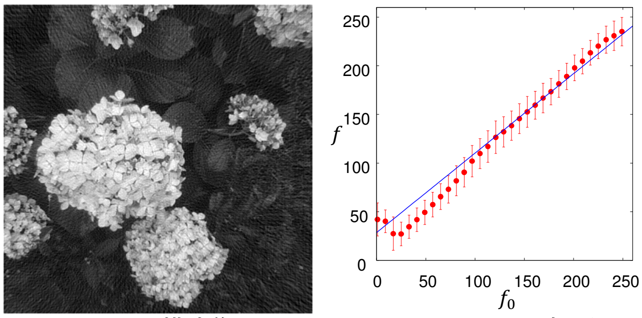


(a) 原画像　(b) Ram-Lak　(c) Shepp-Logan　(d) Gauss 型　(e) エッジフィルタ　(f) Gauss 型＋エッジフィルタ

図 4. ファントムヘッドを用いた各フィルタによる再構成像

がってしまうのを記述していることに対応している。エッジフィルタを通した投影 (e) では (d) の変化がうまく表現されている。更に，(f) では (d) と (e) を合わせると，(b)，(c) と同様なシャープさが回復することがわかる。

図 4 はそれぞれのフィルタを用いて再構成したファントムヘッドである。(a) はファントムヘッドの原画像である。(b)~(f) は図 3 の (b)~(f) に対応している。(d) では (b), (c) に比べやや縁が曖昧な画像になっているが，(f) では Ram-Lak や Shepp-Logan より鮮やかな画像になっている。



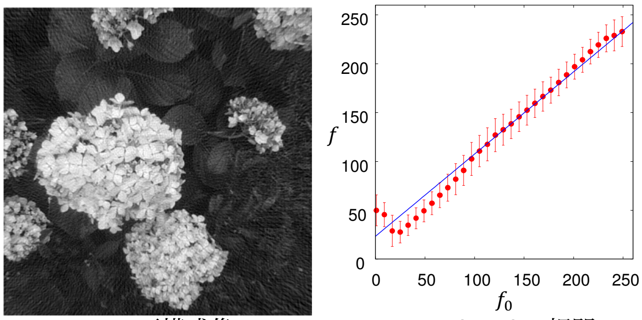
(a) 再構成像　(b) $f_0 - f$ の相関

図 6. Ram-Lak フィルタによる再構成像

4.3.2 デジタル画像によるフィルタの評価

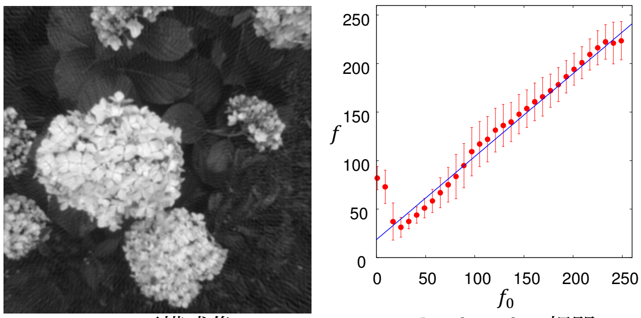
ファントムヘッドは幾何学的な図形の重ね合わせでできているので，高々 10 種類程度の色（$f_0(x, y)$ の値は高々 10 種類程度）でしか $f(x, y)$ の値を評価することができない。より多くの $f_0(x, y)$ の値でフィルタの性能を評価するために，図 5 の白黒の写真 (ビットマップファイル[8]) を使って再構成像を作成し，$f_0(x_i, y_j)$ と $f(x_i, y_j)$（$i, j = 1, \ldots, 420$）を比較した。その手順は次のとおりである：

図 5. 原画像



(a) 再構成像　(b) $f_0 - f$ の相関

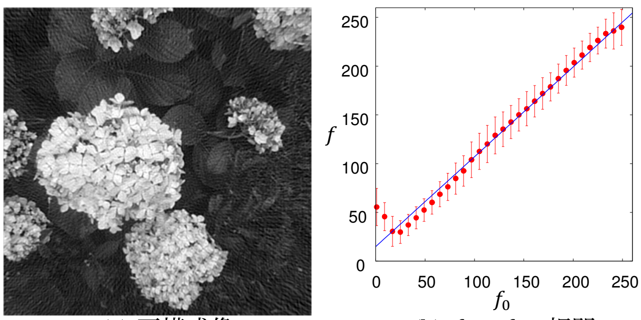
図 7. Shepp-Logan フィルタによる再構成像



(a) 再構成像　(b) $f_0 - f$ の相関

図 8. Gauss 型フィルタによる再構成像

まず，図 5 の写真に対して 1° ごとに角度を変えて投影 $p(s_i, \theta_j)$ をとった。ここで，写真のサイズを 2×2（スケールは任意）とし，s 軸方向の分解能 Δs を $\sim 3.34 \times 10^{-3}$ とした。これは各角度で約 600 本の平行ビームを放射したことに相当する。次にこの投影に 4 種類のフィルタ (Ram-Lak, Shepp-Logan, Gauss 型，Gauss 型 + エッジ) をあて，再構成像 $f(x_i, y_j)$ を求めた。図 6(a) は Ram-Lak フィルタを使った再構成像 f_{RL}，図 7(a) は Shepp-Logan フィルタを使った再構成像 f_{SL}，図 8(a) は Gauss 型フィルタを使った再構成像 f_{Gs}，図 9(a) は Gauss 型 + エッジフィルタを使った再構



(a) 再構成像　(b) $f_0 - f$ の相関

図 9. Gauss 型 + エッジフィルタによる再構成像

[8] 白黒のビットマップファイルでは各ピクセルに 0 から 255 の整数値が割り当てられている。また，本レポートで使用した画像のサイズは $420 \times 420[\mathrm{pxl}^2]$ である。

成像 $f_{\mathrm{Gs}\partial^2}$ である。また，定量的に性能を評価するために，$f_0(x_i, y_j)$ と $f(x_i, y_j)$ の相関を図 6 ~ 9 の (b) に示した。横軸は $f_0(x_i, y_j)$ の値で 0 ~ 255 の整数，縦軸は (x_i, y_j) における $f(x_i, y_j)$ の値（例えば，原画像において f_0 の値が 100 の点の再構成値 f の値）の平均値である。これらの図から，f_0 の値が小さい所 ($f_0 \lesssim 20$) ではデータはばらついているのがわかる。これはこの部分の f_0 のデータ数が少ないためである。一方，$f_0 \gtrsim 100$ では $f = a + bf_0$ の回帰直線によく乗っている。表 2. に各フィルタでの回帰直線の切片 a と傾き b を示した。回帰直線が $f = f_0$ の直線に近いほど性能の良いフィルタであると考えられるので，この写真の再構成像に関しては，Gauss 型 + エッジフィルタが 4 つのフィルタの中で最も再現性が良いことがわかる。

表 2. f_0 と f の関係： $f = a + bf_0$

フィルタ	a 切片	b 傾き
Ram-Lak	28.5 ± 1.4	0.817 ± 0.0107
Shepp-Logan	23.3 ± 1.5	0.842 ± 0.0108
Gauss 型	18.5 ± 1.6	0.856 ± 0.0125
Gauss 型 + エッジ	14.9 ± 1.1	0.922 ± 0.0081

5　まとめ

本レポートでは，CT 等のような投影データから再構成像を求める際に用いられるフィルタ (p-フィルタ) を，原画像 f_0 と再構成像 f との関係という観点から再考し，既存のフィルタが（実際には推定することしかできない）原画像にどのような演算をすることになるのかを明らかにした。それより，新たなフィルタを考案する際の 1 つの指針を「第一原理」として提案した。更に，この第一原理に基づいて，p-フィルタとして Gauss 型フィルタとエッジフィルタを考案し，ファントムヘッドや実際の写真の投影に対してこれらのフィルタを適応し，その再構成値の精度を調べた。ここで考案した Gauss 型 + エッジフィルタは既存のフィルタと同程度の精度で画像を再構成できることがわかった。また，この第一原理に基づけば，デルタ関数の表現はいくつもあるので，この他にも性能の良いフィルタが考案できる可能性があると考えられる。

最後に，式 (21)，(25)，(26) の関係は h が偶関数，$g(x, y)$ が回転対称という条件の下で常に成立する恒等式であることを強調しておく。この関係から，より複雑な公式が生成できるのではないかと期待される。

参考文献

Bracewell, R.N. and Riddle, A.C,, *Astrophys. J*, 150, 47, 1967

Gradshteyn, I.S. and Ryzhil, I.M, “Table of Integrals, Series and Products”, Academic Press, 1996

Kak, A.C. and Slaney, M., “Principles of Computerized Tomographic Imaging”, IEEE Press (New York), 1987

Ramachandran, G.N. and Lakshminarayanan, A.V., *Proc. Not, Acod. Sci*, 68, 2236, 1971

Shepp, L.A. and Logan, B.F., *IEEE. Trans. Nucl. Sci.*, NS-21, 1974

Yoshii, Y. *Astrophys. J*, 403, 552, 1993

A　デルタ関数と Fourier 変換

A.1　デルタ関数

デルタ関数は Dirac が量子力学を構築するために導入した関数である。この関数は

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & (x = a) \\ 0 & (x \neq a) \end{cases}$$

であり，

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(c) & (a \leq c \leq b) \\ 0 & (a > c \text{ または } b < c) \end{cases}$$

を満たす。この関数はゼロでない値を持つときは ∞ となるので，通常の関数と違って幾つかの表現がある。代表的な表現を以下に示す：

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon\to+0} \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & (|x-a| \leq \epsilon/2) \\ 0 & (|x-a| > \epsilon/2) \end{cases} \tag{A.1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\epsilon^2}\right], \tag{A.2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x-a)^2 + \epsilon^2}. \tag{A.3}$$

また，デルタ関数に関する性質の内，本文に関連するものを以下に記す：

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{A.4}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i). \tag{A.5}$$

ただし，x_i は $g(x_i) = 0$ を満たす点で，$i = 1, \ldots, n$ とした。また，2 変数のデルタ関数 $\delta^{(2)}(x, y)$ を極座標で表すと，デルタ関数が回転対称で全空間にわたってこの関数を積分すると 1 であることから，

$$\delta^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi r}\delta(r), \tag{A.6}$$

と表すことができる。

A.2　Fourier 変換

A.2.1　Fourier 変換の定義

画像処理では Fourier 変換が良く用いられるが，文献によっては定数倍だけ異なって定義されることもあるので，確

認の為，ここで用いる Fourier 変換の定義を以下に記す。実空間の変数を x，周波数空間の変数を Q とすると，$f(x)$ とその Fourier 変換 $F(Q)$ の関係は,

$$F(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}2\pi Qx}\mathrm{d}x, \tag{A.7}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(Q)e^{\mathrm{i}2\pi Qx}\mathrm{d}Q, \tag{A.8}$$

である。上式の第 1 式が Fourier 変換，第 2 式が逆 Fourier 変換と呼ばれる。また，2 次元の Fourier 変換は実空間の変数を x, y，周波数空間の変数を Q_x, Q_y とすると，$f(x, y)$ とその 2 次元の Fourier 変換 $F(Q_x, Q_y)$ の関係は

$$F(Q_x, Q_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)e^{-\mathrm{i}2\pi\left(Q_x x+Q_y y\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{A.9}$$

$$f(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} F(Q_x, Q_y)e^{\mathrm{i}2\pi\left(Q_x x+Q_y y\right)}\mathrm{d}Q_x\mathrm{d}Q_y, \tag{A.10}$$

である。

式 (A.1) の右辺を $a = 0$ として Fourier 変換すると

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon}e^{\mathrm{i}2\pi Qx}\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin(\pi Q\epsilon)}{\pi\epsilon Q} = 1,$$

であることから，1 の逆 Fourier 変換はデルタ関数であることを示している：

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}2\pi xQ}\mathrm{d}Q. \tag{A.11}$$

A.2.2　Fourier 変換と合成積

2 つの関数の合成積と Fourier 変換の関係について確認の為ここに記しておく。ここでは，2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成積を $[f\circ g]_{1\mathrm{D}}(x)$ と記し，次のように定義する：

$$[f\circ g]_{1\mathrm{D}}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y. \tag{A.12}$$

ここで，$[\cdots]_{1\mathrm{D}}$ の「1D」は 1 変数の合成積であることを示している。f，g の Fourier 変換をそれぞれ $F(Q)$，$G(Q)$ とすると，式 (A.12) から

$$\begin{aligned}
[f\circ g]_{1\mathrm{D}}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(Q)e^{\mathrm{i}2\pi Qy}\mathrm{d}Q\right.\\
&\qquad\left.\times\int_{-\infty}^{\infty} G(Q')e^{\mathrm{i}2\pi Q'(x-y)}\mathrm{d}Q'\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(Q)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}2\pi(Q-Q')y}\mathrm{d}y\right\}\right.\\
&\qquad\left.\times G(Q')e^{\mathrm{i}2\pi Q'x}\mathrm{d}Q'\right]\mathrm{d}Q\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(Q)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(Q-Q')G(Q')e^{\mathrm{i}2\pi Q'x}\mathrm{d}Q'\right]\mathrm{d}Q\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(Q)G(Q)e^{\mathrm{i}2\pi Qx}\mathrm{d}Q
\end{aligned} \tag{A.13}$$

これは，$[f\circ g]$ の Fourier 変換は $F(Q)G(Q)$ であることを示している。これが,「畳み込み定理」である。

B　いくつかの証明

B.1　式 (22) の証明

$h(s)$ が偶関数 ($h(-s) = h(s)$) のとき, 次の関係が成立する。

$$\int_0^{\pi} h(x\cos\theta + y\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{-r}^{r}\frac{h(s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\mathrm{d}s.$$

[証明]

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} h(x\cos\theta + y\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[h(x\cos\theta + y\sin\theta) + h(-x\cos\theta - y\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[h(x\cos\theta + y\sin\theta)\right.\\
&\qquad\left.+h(x\cos(\theta-\pi) + y\sin(\theta-\pi))\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} h(x\cos\theta + y\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[\int_{-\pi}^{\pi}\delta(r\cos(\theta-\varphi) - s)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}s\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\Theta(r-|s|)\mathrm{d}s\\
&= \int_{-r}^{r}\frac{h(s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{B.1}$$

ここで，$x^2 + y^2 = r^2$ とし，$\Theta(x)$ はステップ関数である。尚この証明で，式 (A.5) を用いた。

B.2　式 (25) の証明

式 (23) の g に式 (21) を代入し，更にこの h に式 (24) を代入すると

$$\begin{aligned}
G(Q_x, Q_y) &= \iint_{\mathbb{R}^2}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\rho)e^{\mathrm{i}2\pi\rho(x\cos\theta+y\sin\theta)}\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta\right\}\\
&\qquad\times e^{-\mathrm{i}2\pi(Q_x x+Q_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\rho)\right.\\
&\qquad\left.\times\left\{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\mathrm{i}2\pi(\rho\cos\theta-Q_x)}e^{\mathrm{i}2\pi(\rho\sin\theta-Q_y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\rho)\delta(\rho\cos\theta - Q_x)\delta(\rho\sin\theta - Q_y)\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta\\
&= H\left(\sigma\sqrt{Q_x^2+Q_y^2}\right)\Big/\sqrt{Q_x^2+Q_y^2},
\end{aligned}$$

ただし，σ は $Q_x < 0$ のとき $\sigma = -1$，$Q_x \geq 0$ のとき $\sigma = +1$ を取るものとする。ここで，$Q = \sigma\sqrt{Q_x^2+Q_y^2}$ とおくと，上式は

$$H(Q) = \sqrt{Q_x^2+Q_y^2}G(Q_x, Q_y) = |Q|\,G(Q_x, Q_y). \tag{B.2}$$

と表すことができ，式 (25) が得られる。

B.3　式 (26) の証明

まず，g の Fourier 変換 $G(Q_x, Q_y)$ を与えてから式 (25) を示す。g の Fourier 変換は式 (23) より

$$
\begin{aligned}
G(Q\cos\theta, Q\sin\theta) &= \int_0^\infty \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}2\pi rQ\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi\right] r\tilde{g}(r)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^\infty J_0(2\pi Qr)r\tilde{g}(r)\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

と表される。ここで，$J_0(x)$ は偶関数であることから上式は Q のみの偶関数 $\tilde{G}(Q)$ と表すことができる。これを式 (25) に代入して更に，逆 Fourier 変換する：

$$
\begin{aligned}
h(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} |Q|\,\tilde{G}(Q)e^{\mathrm{i}2\pi Qs}\mathrm{d}Q \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |Q|\left[\int_0^\infty J_0(2\pi Qr)\tilde{g}(r)r\mathrm{d}r\right]e^{\mathrm{i}2\pi Qs}\mathrm{d}Q \\
&= 4\pi\int_0^\infty \tilde{g}(r)r\left[\int_0^\infty QJ_0(2\pi rQ)\cos(2\pi sQ)\mathrm{d}Q\right]\mathrm{d}r. \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

この式から h が s について偶関数であることは明らかなので，$s \geq 0$ の場合に限定して計算を進める。まず，$s = 0$ のとき，$\cos(2\pi sQ) = 1$ なので，式 (A.6)，(C.9) の関係を使うと $h(0)$ は

$$
h(0) = 2\int_0^\infty \tilde{g}(r)r\left[\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\right]\mathrm{d}r = \frac{1}{\pi}\tilde{g}(0) \qquad \text{(B.4)}
$$

となる。また，$s > 0$ の場合では.

$$
\begin{aligned}
h(s) &= 2\int_0^\infty r\tilde{g}(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\int_0^\infty J_0(2\pi rQ)\sin(2\pi sQ)\mathrm{d}Q\right]\mathrm{d}r, \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^s \frac{r\tilde{g}(r)\mathrm{d}r}{\sqrt{s^2-r^2}}. \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

となることがわかる。ここで，式 (C.7) を使った。

C　Bessel 関数と関連公式

$J_\nu(z)$ は第 1 種の ν 次の Bessel 関数で

$$
\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)J_\nu(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)J_\nu(z) = 0 \qquad \text{(C.1)}
$$

を満たす関数である。この方程式の解は

$$
J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \qquad \text{(C.2)}
$$

のように級数で表される。また，$J_0(x)$ は

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\mathrm{i}x\cos\theta}\mathrm{d}\theta = J_0(x), \qquad \text{(C.3)}
$$

のようにも表せる。また，$J_0(x)$ に関していくつかの公式をここにあげておく (Gradshteyn & Ryzhil, 1996)。

$$
\int_0^\infty J_0(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k}, \qquad \text{(C.4)}
$$

$$
\int_0^{Q_0} QJ_0(aQ)\mathrm{d}Q = \frac{Q_0}{a}J_1(aQ_0), \qquad \text{(C.5)}
$$

$$
\int_0^\infty e^{-aQ}J_0(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a^2+k^2}} \quad (a > 0), \qquad \text{(C.6)}
$$

$$
\int_0^\infty J_0(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} & (0 < a < b) \\ 0 & (b \leq a) \end{cases}, \qquad \text{(C.7)}
$$

$$
\int_0^\infty J_0(ax)\cos(bx)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} & (0 < b < a) \\ \infty & (a = b) \\ 0 & (0 < a < b) \end{cases}. \qquad \text{(C.8)}
$$

また，2 次元のデルタ関数と Bessel 関数の関係は次のとおりである：

$$
\begin{aligned}
\delta^{(2)}(x,y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\mathrm{i}2\pi\left(Q_x x + Q_y y\right)}\mathrm{d}Q_x\mathrm{d}Q_y \\
&= \int_0^\infty Q\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}2\pi Qr\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}Q \\
&= 2\pi\int_0^\infty QJ_0(2\pi rQ)\mathrm{d}Q. \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}
$$

総合科学研究会報告

これまでに開催した総合科学研究会プログラム

(1)「ハンセン病の隔離政策について」
森山一隆氏（奄美和光園退所者）
第 31 回総合科学研究会、2014 年 10 月 3 日、
第 5 講義室

(2) 「放射能汚染下での持続可能な農業対策を目指して〜稲作試験栽培・土壌計測・全量全袋検査の融合〜」
石井秀樹先生（福島大学うつくしまふくしま未来支援センター特任准教授）
第 32 回総合科学研究会、2014 年 12 月 3 日、
第 8 講義室

(3) 「キャピラリーを用いたアフィニティー分離と等電点電気泳動のオンライン結合分析」
長井俊彦先生（福島県立医科大学医学部自然科学講座 化学）
研究連携セミナー・第 33 回総合科学研究会、2015 年 1 月 29 日、
第 2 臨床講義室

(4) 「表面物性を表面の粗さで評価する」
小澤　亮先生　（本学医学部自然科学講座 物理学）
第 34 回総合科学研究会、2015 年 3 月 30 日、
S310 講義室（8 号館＝旧看護学部棟 3 階）

(5) 「福島県の家族の地域性 ーインキョ制家族の分布とその特色をめぐってー」
立柳 聡先生 （本学看護学部総合科学部門）
第 35 回総合科学研究会、2015 年 7 月 28 日、
S309 講義室（8 号館＝旧看護学部棟 3 階）

福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要投稿規定

2012.2.29　提示
2012.10.31 承認
2014.10.16 一部改訂

１．方針・趣旨

本紀要では、センターメンバーの研究活動、および、センターの活動を紹介することを主な目的とする。また、その内容は、本学の理念およびポリシーに則ったものを掲載する。

２．名称及び発行

福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要
英文名称：The Bulletin of the Center for Integrated Sciences and Humanities
年１回、１１月に発行する。

３．投稿資格

[1]　本紀要へ投稿できる者は、本学教職員および非常勤教職員であることを原則とする。
[2]　本学教職員以外の者との共同研究については、本学教職員が共同執筆者である場合に限り、投稿を認める。
[3]　本学の大学院学生及び大学院研究生で、編集委員会において適当と認めた者については、投稿を認める。
[4]　依頼論文の場合は、この限りではない。

４．投稿記事とその種類

記事の種類は次のとおりとする。なお、他誌との完全な二重投稿は認めない。
ただし、総合論文等（これまでの研究論文をまとめたもの）の場合はこの限りではない。
○原著論文
○総説（総合論文を含む）
○資料
○総合科学研究会報告
○センター活動報告詳細記事
○書評
○企画
○その他（編集委員会が適当と認めたもの）

５．倫理規定

人、および動物が対象である研究は、倫理的に配慮され、その旨が本文中に記載されていること。

６．原稿に関すること

[1]　使用言語：和文または欧文とする。大きさはＡ４判とし、電子媒体とする。
[2]　原稿の制限：本文、図・表等を含めた刷り上がり総ページが、欧文、和文おおむね10 ページ以内とする。
[3]　原稿の作成:原稿には別に表紙（別紙）をつけ、論文（記事）の種類の別、論文題目、氏名、所属、電子メールアドレスを記す。なお、別に示すテンプレートを参考にし作成する。
[4]　原稿の提出：各年度の原稿提出の区切りは、8月31日とする。

７．論文等の査読及び採否の決定

[1]　論文については、編集委員会は１名以上の査読者に審査を学内教職員に依頼する。審査の結果、必要ならば、編集委員会は原稿の修正等を求めることができる。
[2]　投稿論文等の採否の最終的な決定は編集委員会が行う。
[3]　依頼論文の場合は、[1][2]の限りではない。

8．校正

[1]　校正は、著者の責任において期限内に行い、再校までで校了するように努力する。
[2]　校正は、誤字、脱字等の訂正を原則とする。
[3]　冊子、表紙、標題、著者名、号巻数などに関する部分は、編集委員会の責任において調整する。

9．掲載の経費及び別刷りについて

[1]　掲載に要する経費は、原則として無料とする。
[2]　別刷りは、発行しない。

１0．出版権の許諾

論文を投稿する者は、総合科学教育研究センターに対し、当該論文に関する出版権の利用につき許諾するものとする。掲載が決定した論文等は、原則として電子化し、総合科学教育研究センターのホームページを通じて公開する。また、福島県立医科大学学術成果リポジトリへの参加を行う。

11．投稿規定の施行

本投稿規定は、2012年4月1日に遡る。

福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要

The Bulletin of the Center for Integrated Sciences and Humanities

平成 27 年 11 月 20日発行

発行機関　公立大学法人　福島県立医科大学　総合科学教育研究センター
〒960-1295　福島市光が丘 1
E-mail:icsh@fmu.ac.jp
Home Page: http://www.fmu.ac.jp/home/icsh/?x=cat:1

福島県立医科大学総合科学教育研究センター紀要 Vol.4 2015
平成 27 年 11 月 20 日発行